IOANA BĂRBAT
ALEXANDRU DUMITRACHE

MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN TEHNICA DE CALCUL

IX

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

IOANA BĂRBAT

Dr. ALEXANDRU DUMITRACHE

MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN TEHNICA DE CALCUL

clasa a IX-a

Manual pentru licee cu profil
de matematică și de matematică-fizică



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

C U P R I N S

I
SISTEME DE NUMERAȚIE

I.1. Definirea sistemelor de numerație

Pentru reprezentarea numerelor se aleg două mulțimi, una A de denumiri specifică fiecărei limbi și a doua B de simboluri distincte, numite cifre, între care să existe o corespondență biunivocă.

I.1.1. *Definiție.* **Numărul $b > 1$ al cifrelor mulțimii B se numește baza sistemului de numerație. Numerele naturale c pentru care $0 \leqslant c \leqslant b - 1$ se numesc cifre în baza b.**

Pentru scrierea numerelor în baza b se folosesc b semne distincte.

Fie N numărul de elemente ale unei mulțimi M. Vom grupa elementele lui M în submulțimi, avînd fiecare cîte b elemente, obținînd k_1 de astfel de submulțimi și încă o submulțime cu a_0 elemente cu $0 \leqslant a_0 < b$.

Putem scrie:

$$N = k_1 b + a_0. \tag{1}$$

Pentru cazul $N < b$, avem $k_1 = 0$ și deci nu se poate forma nici o submulțime cu b elemente. Avem $N = a_0$.

În cazul $k_1 < b$ păstrăm N sub forma $N = k_1 b + a_0$.

Pentru $k_1 \geqslant b$ procedăm cu k_1 întocmai cum am procedat anterior cu N găsind k_2 grupe de cîte b submulțimi cu cîte b elemente și a_1 submulțimi de cîte b elemente, în care $0 \leqslant a_1 < b$.

Putem scrie pentru k_1 o relație analoagă cu (1), scrisă pentru N,

$$k_1 = k_2 b + a_1. \tag{2}$$

Dar ținînd seama de (1) și (2), avem

$$N = (k_2 b + a_1)b + a_0 ; \; N = k_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Dacă avem $k_2 \geqslant b$ continuăm procesul formării de grupe de submulțimi obținînd k_3 grupe de cîte b grupe de cîte b submulțimi cu cîte b elemente, și încă a_2 grupe de cîte b grupe de submulțimi cu b elemente.

Se obține astfel:

$$N = [(k_3 b + a_2)b + a_1]b + a_0$$

adică,

$$N = k_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Continuînd, prin același procedeu, deoarece mulțimea M are N elemente, se ajunge după un număr finit de pași la un $k_n = a_n$, unde $1 \leq a_n \leq b - 1$ și deci

(3) $$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Un număr scris sub forma (3) se spune că este scris sub *formă polinomială.*

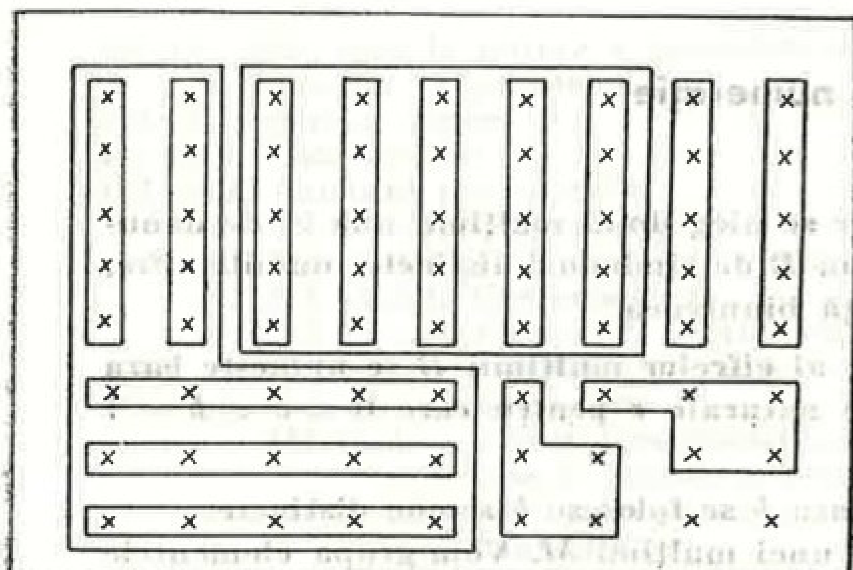


Fig. I.1

Exemplu. În figura I.1 mulțimea N este mulțimea tuturor punctelor încadrate iar $b = 5$. Se observă că $N = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2$.

Dacă baza b este precizată și nu există posibilitatea unor confuzii, atunci numărul N poate fi scris într-o formă mai simplă numai cu ajutorul simbolurilor $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ care formează fiecare o singură cifră și $a_n \neq$ astfel:

(4) $$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0.$$

Fiecare dintre cifrele $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ocupă o anumită poziție indicată de exponentul bazei. Scrierea sub forma (4) mai poartă denumirea de *scriere pozițională.*

Introducem noțiunea de *ordin* al unei cifre care este indicat de exponentul bazei din produsul dintre cifră și o putere a bazei. În (4) cifra a_0 este cifra de ordinul zero, cifra a_1 este cifra de ordinul 1 și așa mai departe, cifra a_n este de ordinul n. În acest fel citirea numărului N se poate face și cifră cu cifră începînd de la stînga spre dreapta, adică de la ordinul cel mai mare n pînă la ordinul cel mai mic zero.

I.2. Scrierea unui număr real într-un sistem de numerație

În paragraful precedent s-a arătat cum se scrie un număr natural, într-o bază de numerație b oarecare. Se știe însă că orice număr întreg este de forma $\pm N$ unde N este număr natural. Deci pentru un întreg M oarecare, scrierea într-o bază dată b este:

(5) $$M = \pm(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0)$$

sau

(6) $$M = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(b)}.$$

Un număr real oarecare este suma dintre un număr întreg și un număr fracționar pozitiv, numite partea întreagă și partea fracționară, scriindu-se în ordine : partea întreagă, virgula și apoi partea fracționară*.

Exemple :

$$3 + 0,21 = 3,21 ;$$

$$-4 + 0,62 = \overline{4},62.$$

Pentru numerele reale negative se utilizează frecvent scrierea în care semnul minus (−) scris la stînga numărului este atribuit și părții întregi și părții fracționare.

Exemplu :

$$\overline{5},24 = -5 + 0,24 = (-4) + (-1 + 0,24) = (-4) - (0,76) = -4,76.$$

De aceea, pentru claritatea înțelegerii, în cele ce urmează, vom numi întregii unui număr, partea de la stînga virgulei și parte fracționară (sau parte zecimală) partea de la dreapta virgulei, în toate cazurile în care avem același semn și pentru întregi și pentru partea fracționară.

Pentru un număr real oarecare x, care are și întregi și parte fracționară, vom avea o scriere de forma

$$(7) \quad x = \pm\left(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 + \frac{a_{-1}}{b} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{b^m}\right) + r_m,$$

unde

$$0 \leqslant a_i < b \text{ pentru orice } i = 0, 1, \ldots, n, \text{ cu } a_n \neq 0$$

și

$$0 \leqslant a_{-j} < b \text{ pentru orice } j = 0, 1, \ldots, m,$$

iar restul r_m verifică inegalitățile

$$0 \leqslant r_m < \frac{1}{b^m}.$$

Este necesar să introducem un semn de separare a întregilor de partea fracționară. În mod obișnuit se folosește virgula, numită și virgula zecimală, însă trebuie știut că se folosește și punctul, numit punct zecimal (în scrierea anglo-saxonă).

Deci un număr x cu $r_m = 0$ se scrie

$$(8) \quad x = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, \; a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m(b)}$$

sau

$$x = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m(b)}.$$

---

* Algebra cl. a IX-a, cap. III.

Exemple :

1) Numărul $257_{(b)}$, ($b > 7$), (se citește cifră cu cifră), se scrie

$$257_{(b)} = 2b^2 + 5b + 7.$$

2) Numărul $-586_{(b)}$, ($b > 8$), (se citește cifră cu cifră), se scrie

$$-586_{(b)} = -(5 \cdot b^2 + 8b + 6).$$

3) Numărul $x = 3b^2 + 7b + 4 + \frac{4}{b} + \frac{5}{b^2} + \frac{2}{b^4}$ scris în baza b ($b > 7$) este $x = 374{,}4502_{(b)}$.

1.3. Sistemul de numerație în baza zece

Sistemul de numerație în baza zece, numit și sistem zecimal, folosește zece cifre distincte date prin simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cu ajutorul cărora putem scrie orice număr.

Orice număr natural mai mic decît zece se reprezintă prin una din aceste cifre și arată cîte unități de ordinul zero are numărul.

Un număr natural N, mai mare sau egal cu zece, se va reprezenta printr-un șir de cifre în felul următor :

Numărul natural zece, egal deci cu numărul cifrelor bazei utilizate, se reprezintă prin 10 și se citește zece. Acest număr se numește unitate de ordinul întîi și reprezintă zece unități de ordinul zero.

Un număr care conține a_1 unități de ordinul întîi și a_0 unități de ordinul zero se scrie

$$a_1a_0 = a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Un număr care conține 10 unități de ordinul întîi se scrie 100 și reprezintă o unitate de ordinul doi. Unitatea de ordinul doi este produsul între baza zece și unitatea de ordinul întîi

$$10 \cdot 10 = 10^2 = 100.$$

Un număr care conține a_2 unități de ordinul doi, a_1 unități de ordinul întîi și a_0 unități de ordinul zero se scrie astfel :

$$a_2a_1a_0 = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Generalizînd, putem spune că un număr care conține 10 unități de ordinul k, se va numi unitate de ordinul $k + 1$ și se va scrie astfel :

$$10 \cdot 10^k = 10^{k+1} = 1\underbrace{0\ldots0}_{k+1 \text{ cifre de zero}}.$$

Numărul ce conține a_n unități de ordinul n, a_{n-1} unități de ordinul $n-1$ și așa mai departe, a_1 unități de ordinul întîi și a_0 unități de ordinul zero se scrie,

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant 9 \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n, \text{ cu } a_n \neq 0.$$

Ca și în cazul bazei b putem extinde scrierea în baza zece la numere reale.

Pentru un număr întreg M care este de forma $\pm N$, unde N este număr natural, avem scrierea:

$$M = \pm(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0)$$

sau

$$M = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,$$

iar pentru un număr real x oarecare, avînd și parte zecimală, avem:

$$x = \pm \left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{a_{-m}}{10^m} + \ldots \right),$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant 9 \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n, \text{ cu } a_n \neq 0$$

și

$$0 \leqslant a_{-j} \leqslant 9 \text{ pentru } j = 0, 1, \ldots, m, \ldots$$

sau

$$x = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \ldots$$

unde virgula separă întregii de partea zecimală.

La scrierea în baza zece de obicei nu se mai indică alăturat baza așa cum am procedat și în cazurile de mai sus.

I.4. Sistemul de numerație în baza doi

I.4.1. Scrierea numerelor în baza doi

Sistemul de numerație în baza doi, numit și sistem de numerație binar, este sistemul în care se folosesc cifrele 0 și 1.

Numerele naturale mai mici decît doi se vor scrie cu aceste cifre, respectiv „0" pentru zero și „1" pentru unu.

Baza de numeraţie fiind doi o vom nota $10_{(2)}$ şi pentru un număr natural oarecare avem:

$$N = a_n 10^n_{(2)} + a_{n-1} 10^{n-1}_{(2)} + \ldots + a_1 10_{(2)} + a_0,$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant 1 \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ şi } a_n = 1$$

sau

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(2)}$$

cu aceleaşi condiţii pentru a_i şi a_n.

Un număr care conţine o unitate de ordinul zero se scrie $N = 1$.

Un număr care conţine o unitate de ordinul întîi se scrie $N = 10_{(2)}$.

Un număr care conţine o unitate de ordinul întîi şi o unitate de ordinul zero se scrie

$$N = 11_{(2)}.$$

În general, o unitate de ordinul n conţine două unităţi de ordinul $n-1$, adică $10_{(2)} \cdot 10^{n-1}_{(2)} = 10^n_{(2)}$ sau $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ în baza zece.

Folosind rezultatele date de formulele (7) şi (8) din paragraful I.2 pentru cazul $b = 2$, scriem un număr real x în baza doi sub forma:

$$x = \pm \left(a_n 10^n_{(2)} + a_{n-1} 10^{n-1}_{(2)} + \ldots + a_1 10_{(2)} + a_0 + \frac{a_{-1}}{10_{(2)}} + \frac{a_{-2}}{10^2_{(2)}} + \ldots + \frac{a_{-m}}{10^m_{(2)}} + \ldots \right),$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant 1 \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n-1, \; a_n = 1$$

şi

$$0 \leqslant a_{-j} \leqslant 1 \text{ pentru } j = 0, 1, \ldots, m, \ldots$$

sau

$$x = \pm\, a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \ldots_{(2)}.$$

I.4.2. Operaţii cu numere scrise în baza doi

În general efectuarea operaţiilor în baza doi nu se deosebeşte esenţial de efectuarea operaţiilor în baza zece. Se păstrează formele de aşezare a numerelor pentru efectuarea operaţiilor şi numai tabelele de operaţii sînt altele. Deoarece urmărirea operaţiilor cu numere scrise în binar devine mult mai uşoară dacă se cunosc tabelele de operaţii pentru adunare şi înmulţire, le dăm pe acestea în continuare.

Tabelul I.1

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabelul I.2

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Să urmărim în continuare cîteva exemple :

1)
$$\begin{array}{r} 11,111 + \\ 10,001 \\ \hline 110,000 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 100000,011 - \\ 1000,101 \\ \hline 10111,110 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 11,01 \times \\ 1,011 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 1101 \\ \hline 100,01111 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r|l} 1101,1 & 110 \\ \cline{2-2} 110 & 10,01 \\ \cline{1-1} ===110 & \\ 110 & \\ \cline{1-1} === & \end{array}$$

I.5. Sistemul de numerație în baza opt

I.5.1. Scrierea numerelor în baza opt

Sistemul de numerație în baza opt, numit și sistem de numerație octal, este sistemul în care se folosesc opt cifre și anume, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 iar baza se notează cu ajutorul cifrelor „0“ și „1“ scriind 10, dacă nu este posibilă o confuzie, în caz contrar scriind cu specificație $10_{(8)}$.

Avem :

$$N = a_n 10^n_{(8)} + a_{n-1} 10^{n-1}_{(8)} + \ldots + a_1 10_{(8)} + a_0$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant 7 \text{ pentru } i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \text{ cu } a_n \neq 0$$

sau

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(8)}$$

cu aceleași condiții pentru a_i și a_n.

Numerele mai mici decît opt se vor scrie cu cifrele indicate pentru această bază și vor fi numite unități de ordinul zero.

O unitate de un anumit ordin (în afară de ordinul zero) este egală cu opt unități de ordin inferior iar opt unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior, adică,

$$10_{(8)} \cdot 10^{n-1}_{(8)} = 10^n_{(8)} \text{ sau în baza zece } 8 \cdot 8^{n-1} = 8^n.$$

Formulele (7) și (8) din paragraful I.2 pentru cazul $b = 8$ ne permit să scriem un număr real x în baza opt sub forma :

$$x = \pm \left(a_n 10^n_{(8)} + a_{n-1} 10^{n-1}_{(8)} + \ldots + a_1 10_{(8)} + a_0 + \frac{a_{-1}}{10_{(8)}} + \frac{a_{-2}}{10^2_{(8)}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{a_{-m}}{10^m_{(8)}} + \ldots \right),$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant 7 \text{ pentru } i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \text{ cu } a_n \neq 0$$

și

$$0 \leqslant a_{-j} \leqslant 7 \text{ pentru } j = 0,\ 1,\ \ldots,\ m,\ \ldots$$

sau

$$x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \ldots_{(8)}.$$

I.5.2. Operaţii cu numere scrise în baza opt

Şi în baza opt, ca şi în baza doi, efectuarea operaţiilor nu se deosebeşte prea mult de efectuarea operaţiilor în baza zece, deoarece se păstrează formele de aşezare ale numerelor. Diferă numai tabelele de operaţii şi de aceea pentru a da posibilitatea unei urmăriri mai uşoare le dăm în continuare:

Tabelul I.3

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Tabelul I.4

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Să urmărim mai jos cîteva exemple de operaţii în octal.

1)
$$\begin{array}{r} 547{,}317\ + \\ 3250{,}715 \\ \hline 4020{,}234 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 7456{,}625\ - \\ 6767{,}546 \\ \hline 467{,}057 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 26{,}5\ \times \\ 32{,}4 \\ \hline 1\,3\,2\,4 \\ 5\,5\,2\ \ \\ 1\,0\,3\,7\ \ \ \ \\ \hline 1\,1\,2\,7{,}4\,4 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l|l} 30{,}6 & 26 \\ \cline{2-2} 26 & 1{,}1 \\ \cline{1-1} =26 & \\ \ \ 26 & \\ \cline{1-1} == & \end{array}$$

I.6. Sistemul de numeraţie în baza şaisprezece

I.6.1. Scrierea numerelor în baza şaisprezece

Baza de numeraţie şaisprezece, numită şi hexazecimală, foloseşte şaisprezece semne pentru cifrele bazei. Primele zece semne sînt cele cunoscute de la baza zece, iar în continuare sînt utilizate literele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, care au următoarele semnificaţii:

— cifra *A* în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 10 din sistemul zecimal;

— cifra B în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 11 din sistemul zecimal ;

— cifra C în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 12 din sistemul zecimal ;

— cifra D în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 13 din sistemul zecimal ;

— cifra E în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 14 din sistemul zecimal ;

— cifra F în sistemul hexazecimal reprezintă numărul 15 din sistemul zecimal.

Baza se notează cu ajutorul cifrelor „0" şi „1" scriind 10, dacă nu este posibilă vreo confuzie ; în caz contrar baza se scrie cu specificaţie $10_{(16)}$.

Numerele naturale mai mici decît baza se vor scrie cu una din cifrele indicate.

Pentru un număr natural oarecare avem :

$$N = a_n 10^n_{(16)} + a_{n-1} 10^{n-1}_{(16)} + \ldots + a_1 10_{(16)} + a_0,$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant F \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n \text{ cu } a_n \neq 0,$$

sau

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(16)}$$

cu aceleaşi condiţii pentru a_i şi a_n.

Orice unitate de un anumit ordin este egală cu şaisprezece unităţi de ordin inferior (cu excepţia ordinului zero) iar şaisprezece unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior, adică

$$10_{(16)} \cdot 10^{n-1}_{(16)} = 10^n_{(16)} \text{ sau în baza zece } 16 \cdot 16^{n-1} = 16^n.$$

Ca şi în cazul celorlalte baze de numeraţie de pînă acum, putem aplica formulele (7) şi (8) din paragraful I.2 pentru cazul $b = 16$ şi putem scrie un număr real x în baza şaisprezece sub forma,

$$x = \pm \left(a_n 10^n_{(16)} + a_{n-1} 10^{n-1}_{(16)} + \ldots + a_1 10_{(16)} + a_0 + \frac{a_{-1}}{10_{(16)}} + \frac{a_{-2}}{10^2_{(16)}} + \ldots \ldots + \frac{a_{-m}}{10^m_{(16)}} + \ldots \right),$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant F \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n \text{ cu } a_n \neq 0$$

şi

$$0 \leqslant a_{-j} \leqslant F \text{ pentru } j = 0, 1, \ldots, m, \ldots$$

sau

$$x = \pm\, a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \ldots_{(16)}.$$

1.6.2. Operații cu numere scrise în baza șaisprezece

Și în hexazecimal operațiile se fac ca în bazele doi, opt sau zece. De aceea vom da mai întîi tabelele de operații pentru adunare și înmulțire.

Tabelul I.5

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Tabelul I.6

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Exemple de operații în hexazecimal.

```
1)    FFC,ED +          2)    A02,B4 -
       14A,2B                 87B,FC
     ---------               --------
     1 147,18                 186,B8

3)      A,7 ×           4)    C8 | A
        8,C                   A  |----
      -----                   -- | 14
       7D4                    28
      538                     28
     ------                   ==
      5B,54
```

Sistemele de numerație binar, octal și hexazecimal precum și operațiile cu numere scrise în aceste sisteme sînt utilizate în toate problemele ce sînt rezolvate cu ajutorul calculatoarelor. Așa cum se va vedea în capitolele următoare, scrierea în sistemul binar asigură posibilitatea de introducere în calculator a datelor și comenzilor pentru faptul că utilizînd doar două simboluri (0 și 1), acestea pot fi ușor modelate fizic.

I.7. Trecerea numerelor dintr-o bază în alta

I.7.1. Trecerea unui număr dintr-o bază în alta prin baza zece

Trecerea numerelor dintr-o bază de numerație în alta se mai numește și *conversie*. La tratarea acestei probleme putem presupune, pentru simplificare, că numărul este întreg sau chiar natural.

Fie N scris în baza b și vrem să-l scriem în baza β diferită de b. În general, trecerea de la o bază la alta se face prin intermediul bazei zece. De aceea vom scrie atît cifrele numărului N cît și baza b în baza zece.

Dacă numărul este :

(9) $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$, cu $a_n \neq 0$ și $i = 0, 1, \ldots, n$,

unde a_i scrise în baza zece sînt de forma

$$a_i = a'_{j_i} a'_{j_{i-1}} \ldots a'_1 a'_0 \text{ cu } 0 \leqslant a'_l \leqslant 9 \text{ și } l = 0, 1, \ldots, j_i,$$

iar baza b scrisă în bază zece are forma

$$b = a''_k a''_{k-1} \ldots a''_1 a''_0 \text{ cu } 0 \leqslant a''_i \leqslant 9 \text{ și } a''_k \neq 0,$$

atunci înlocuind în (8) și efectuînd operațiile în baza zece obținem numărul sub forma

$$N = \bar{a}_m 10^m + \bar{a}_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \bar{a}_1 10 + \bar{a}_0,$$

sau

$$N = \bar{a}_m \bar{a}_{m-1} \ldots \bar{a}_1 \bar{a}_0.$$

Pentru exemplificare, să luăm

$$N = CD82_{(16)},$$

adică

$$N = C \cdot 10^3_{(16)} + D \cdot 10^2_{(16)} + 8 \cdot 10_{(16)} + 2.$$

Scriindu-i cifrele şi baza în baza zece, avem

$$C = 12 \; ; \; D = 13 \; ; \; 8 = 8 \; ; \; 2 = 2 \; ; \; 10_{(16)} = 16.$$

Deci

$$N = 12 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 2$$

unde făcînd calculele obţinem :

$$N = 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 = 52\,610.$$

Pentru a trece numărul

$$N = \bar{a}_m \bar{a}_{m-1} \ldots \bar{a}_1 \bar{a}_0$$

din baza zece în baza β trecem la numărarea unei mulţimi cu N elemente, N fiind scris în baza zece, formînd submulţimi de cîte β elemente şi grupe cu β submulţimi de cîte β elemente etc.

Realizăm mai uşor această numărare scriind şi baza β în baza zece şi apoi efectuăm împărţirea lui N scris în baza zece la β scris în baza zece şi apoi cîtul obţinut îl împărţim din nou la β scris în baza zece şi aşa mai departe.

Această operaţie se desfăşoară după următorul algoritm :

$$N = k_1\beta + \alpha_0, \qquad 0 \leqslant \alpha_0 < \beta,$$

$$k_1 = k_2\beta + \alpha_1, \qquad 0 \leqslant \alpha_1 < \beta,$$

$$k_2 = k_3\beta + \alpha_2, \qquad 0 \leqslant \alpha_2 < \beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_{p-1} = k_p\beta + \alpha_{p-1}, \qquad 0 \leqslant \alpha_{p-1} < \beta,$$

$$k_p = 0 \cdot \beta + \alpha_p, \qquad \alpha_p = k_p,$$

ultima împărţire efectuată fiind aceea în care $k_p < \beta$. Numărul N scris în baza β va fi deci

$$N = \alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0.$$

Exemplu :

Fie $N = 52\,610$ în baza zece pe care să-l scriem în baza 8.

Putem utiliza o schemă de împărțire puțin modificată (fig. I.2) astfel

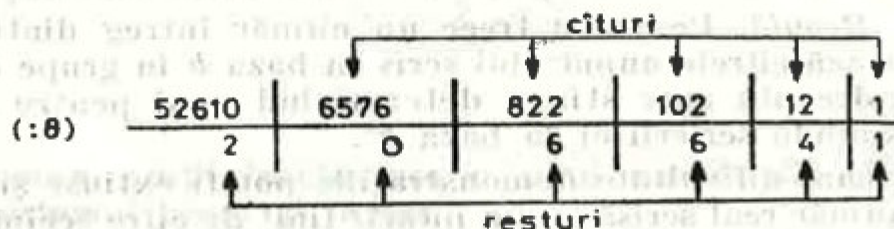


Fig. I.2

Deci $52\,610 = 146\,602_{(8)}$.

I.7.2. Trecerea unui număr dintr-o bază b^k în baza b și invers

În trecerea de la baza b la baza β, un interes deosebit îl prezintă cazul în care între b și β există una dintre relațiile :

$$b = \beta^k \text{ sau } \beta = b^k.$$

Să presupunem că avem $\beta = b^k$.

În acest caz, numărul N dat de expresia

$$(10) \qquad N = \alpha_m\beta^m + \alpha_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + a_1\beta + \alpha_0$$

poate fi scris în baza b punînd în locul bazei β pe b^k, iar cifrele α_i, $(i = 0, 1, \ldots, m)$ din baza β vor fi scrise în baza b.

Cifrele α_i scrise în baza b sînt numere cu k cifre de forma :

$$\alpha_i = \alpha_{i,k-1}b^{k-1} + \alpha_{i,k-2}b^{k-2} + \ldots + \alpha_{i,1}b + \alpha_{i,0},$$

unde coeficienții $\alpha_{i,h}$, $(i = 0, 1, \ldots, m;\ h = 0, 1, \ldots, k-1)$ sînt toți nuli sau nu după cum α_i au fost nuli sau nu, deoarece $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta - 1$.

Înlocuind exprimările lui α_i în (10) se obține :

$$N = (\alpha_{m,k-1}b^{k-1} + \alpha_{m,k-2}b^{k-2} + \ldots + \alpha_{m,1}b + \alpha_{m,0})b^{mk} +$$
$$+ (\alpha_{m-1,k-1}b^{k-1} + \ldots + \alpha_{m-1,0})b^{(m-1)k} + \ldots + (\alpha_{1,k-1}b^{k-1} + \alpha_{1,k-2}b^{k-2} +$$
$$+ \ldots + \alpha_{1,1}b + \alpha_{1,0})b^k + (\alpha_{0,k-1}b^{k-1} + \alpha_{0,k-2}b^{k-2} + \ldots + \alpha_{0,1}b + \alpha_{0,0}),$$

adică

$$N = \alpha_{m,k-1}b^{mk+k-1} + \alpha_{m,k-2}b^{mk+k-2} + \ldots + \alpha_{0,1}b + \alpha_{0,0}.$$

De unde rezultă că cifrele lui N în baza b sînt cele găsite pentru fiecare α_m din scrierea în baza β fără modificarea ordinei.

Am obținut deci următoarea

I.7.2.1. — *Regulă.* Pentru trecerea unui număr întreg N de la o bază b^k la baza b scriem fiecare dintre cifrele numărului N din baza b^k în baza b cu

ajutorul a exact k cifre în baza b, păstrînd ordinea cifrelor din scrierea în baza b^k şi avînd grijă ca prima cifră din stînga a numărului obţinut să fie nenulă.

Nu este greu de observat că şi trecerea inversă se face după următoarea

I.7.2.2. — *Regulă.* Pentru a trece un număr întreg dintr-o bază b în baza b^k se grupează cifrele numărului scris în baza b în grupe de cîte k cifre începînd de la dreapta spre stînga determinînd apoi pentru fiecare grupă cifra care corespunde scrierii ei în baza b^k.

Fără prea mare dificultate demonstraţiile pot fi extinse şi la partea zecimală a unui număr real scrisă cu un număr finit de cifre zecimale şi în acest caz regulile de la I.7.2.1 şi I.7.2.2 aplicate părţii zecimale cu începere de la virgulă spre dreapta ne produc trecerea unui număr real dintr-o bază b^k în baza b şi invers.

I.7.3. Trecerea numerelor întregi din sistemul zecimal în sistemul binar şi invers

Reamintindu-ne rezultatul obţinut în paragraful I.7.1 putem repede reconstitui algoritmul de trecere de la baza 10 la baza 2 şi anume :

I.7.3.1. — *Regulă.* Pentru trecerea unui număr întreg din baza 10 în baza 2 se împarte numărul scris în baza 10 la 2 găsindu-se restul 0 sau 1, apoi cîtul obţinut se împarte iar la 2 găsindu-se restul 0 sau 1 şi aşa mai departe, pînă cînd ultimul cît obţinut va fi 0, deci ultimul rest este egal cu 1. Cifrele care reprezintă resturile, luate în ordinea inversă obţinerii, formează numărul căutat.

Exemple :

Să se facă conversia din baza 10 în baza 2 a numerelor :

a) 75 ; b) —379.

Pentru calcul utilizăm o aşezare ca în figura I.3.

a) (2)

75	37	18	9	4	2	1
1	1	0	1	0	0	1

; $75 = 1001011_{(2)}$

b) (2)

379	189	94	47	23	11	5	2	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1

; $-379 = -101111011_{(2)}$

Fig. I.3

Pentru conversia din baza 2 în baza 10 folosim scrierea :

$$N = a_n 10^n_{(2)} + a_{n-1} 10^{n-1}_{(2)} + \ldots + a_1 10_{(2)} + a_0.$$

Ştiind că $10_{(2)} = 2$ şi că oricare a_i este cifra 0 sau 1 aceeaşi şi în baza zece deducem :

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i.$$

I.7.4. Trecerea părţii fracţionare a unui număr din sistemul zecimal în sistemul binar şi invers

Fie x numărul ce reprezintă o parte fracţionară în sistemul zecimal pe care vrem să o trecem în binar. Scrierea în binar a lui x, avînd $10_{(2)}$ exprimat în baza zece, deci $10_{(2)} = 2$, este :

$$x = \frac{a_{-1}}{2} + \frac{a_{-2}}{2^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{2^m}.$$

Dacă înmulţim pe x cu 2 obţinem :

$$2x = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{2^{m-1}}.$$

Se observă că prima cifră de la partea fracţionară a_{-1} devine cifră de la partea întreagă a numărului înmulţit cu 2. Este uşor acum de continuat. După înmulţiri succesive cu 2 putem pune în evidenţă pe rînd cifrele de la partea fracţionară a numărului scris în baza 2. Avem aşadar :

I.7.4.1. — *Regulă.* Pentru determinarea cifrelor din scrierea unei părţi fracţionare la trecerea din baza zece în baza doi, se înmulţeşte numărul cu 2 şi partea întreagă a numărului obţinut va fi prima cifră de după virgulă a numărului scris în binar, apoi se înmulţeşte cu 2 partea fracţionară a produsului obţinut anterior şi partea întreagă a noului rezultat va fi a doua cifră de după virgulă a numărului scris în baza 2 ş.a.m.d.

Menţionăm că şi în baza 2 pot fi părţi fracţionare periodice.

Exemplu :

Să se facă conversia din zecimal în binar a numărului 0,375.

Utilizăm schema din figura I.4.

a) (·2) 375 | 750 | 50 | 0 ; 0, 375 = 0, 011(2)
0 | 0 | 1 | 1

partea întreagă

Fig. I.4

Pentru trecerea de la baza 2 la baza 10 considerăm scrierea numărului x, parte fracţionară, în baza 2

$$x = \frac{a_{-1}}{10_{(2)}} + \frac{a_{-2}}{10^2_{(2)}} + \ldots + \frac{a_{-m}}{10^m_{(2)}}$$

în care trecem pe $10_{(2)}$ în baza zece şi avem $10_{(2)} = 2$, iar cifrele numărului x din baza 2 au aceeaşi semnificaţie şi în baza zece. Urmează că :

$$x = \frac{a_{-1}}{2} + \frac{a_{-2}}{2^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{2^m},$$

adică

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{-i}}{2^i}.$$

Exemplu :

Să se facă conversia din binar în zecimal pentru numărul $0{,}01011_{(2)}$.

Avem :

$$0{,}01011_{(2)} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = \frac{11}{32} = 0{,}34375.$$

Observaţie : Dacă un număr are şi întregi şi parte fracţionară, atunci conversia se face separat pentru fiecare parte, apoi se reconstituie numărul din părţile transformate.

Exemplu :

$$42{,}13 = 42 + 0{,}13 = 101010_{(2)} + 0{,}00(10000101000111101011)_{(2)} =$$
$$= 101010{,}00(10000101000111101011)_{(2)},$$

unde grupul de cifre în paranteze de la partea fracţionară reprezintă perioada acestui număr în baza 2.

I.7.5. Trecerea numerelor întregi din sistemul zecimal în sistemul octal sau hexazecimal şi invers

Bazîndu-ne pe acelaşi rezultat obţinut în paragraful I.7.1 putem reconstitui algoritmul de trecere de la baza 10 la baza 8 sau 16 ca şi în cazul bazei 2. Putem prelua regula I.7.3.1 în care în locul bazei 2 avem în vedere baza 8 sau 16 în rest totul rămîne neschimbat.

Exemplul tratat la I.7.1 folosind figura I.2 arată trecerea de la baza zece la baza opt.

Pentru trecerea de la baza zece la baza şaisprezece considerăm numărul 583 şi folosind o aşezare ca în figura I.2 avem :

(16)	583	36	2
	7	4	2

; $583 = 247_{(16)}$

Conversia inversă, de la baza 8 sau 16, la baza 10 se face folosind scrierea

$$N = a_n 10^n_{(8)} + a_{n-1}10^{n-1}_{(8)} + \ldots + a_1 10_{(8)} + a_0$$

pentru baza 8, iar pentru baza 16

$$N = a_n 10^n_{(16)} + a_{n-1}10^{n-1}_{(16)} + \ldots + a_1 10_{(16)} + a_0.$$

Trecînd atît cifrele a_i cît şi baza $10_{(8)}$ respectiv $10_{(16)}$ în baza 10 se obţine pentru baza 8

$$N = a_n' 8^n + a_{n-1}' 8^{n-1} + \ldots + a_1' 8 + a_0$$

iar pentru baza 16

$$N = a_n'' 16^n + a_{n-1}'' 16^{n-1} + \ldots + a_1'' 16 + a_0'',$$

unde cifrele a_i' sînt numerele rezultate din trecerea cifrelor a_i din baza 8 în baza 10 iar a_i'' numerele rezultate din trecerea cifrelor a_i din baza 16 în baza 10.

Rezultă pentru trecerea din baza 8 în baza 10

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i' 8^i$$

iar pentru trecerea din baza 16 în baza 10

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i'' 16^i.$$

Exemple :

a) Să se facă conversia din octal în zecimal a numărului

$$N = 547_{(8)}.$$

Rezolvare :

$$547_{(8)} = 5 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 7 = 359.$$

b) Să se facă conversia din hexazecimal în zecimal a numărului

$$N = FA81_{(16)}.$$

Rezolvare :

$$FA81_{(16)} = 15 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 1 = 64\,129.$$

1.7.6. Trecerea părţii fracţionare a unui număr din sistemul zecimal în sistemul octal şi invers

Dacă x este partea fracţionară a numărului scris în sistemul zecimal, şi vrem să o scriem în octal, folosim scrierea lui x în octal, unde baza $10_{(8)}$ se scrie în baza zece, adică $10_{(8)} = 8$ şi avem :

$$x = \frac{a_{-1}}{8} + \frac{a_{-2}}{8^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{8^m}.$$

Înmulțind pe x cu 8 se obține:

$$8x = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{8} + \ldots + \frac{a_{-m}}{8^{m-1}}$$

unde se observă că prima cifră de la partea fracționară devine singura cifră a părții întregi a numărului obținut prin înmulțirea cu 8. Repetînd înmulțirea, se poate continua determinarea cifrelor de la partea fracționară a numărului. Procedeul fiind analog cu cel de la baza 2, putem utiliza regula de la I.7.4.1 unde în locul bazei 2 avem baza 8.

De asemenea, facem sublinierea că și în baza 8 putem avea părți fracționare periodice.

Exemplu :

Să se facă conversia din zecimal în octal a numărului 0,484375.

Utilizăm o schemă ca la baza 2 și avem :

(8)	484375	875	0
	0	3	7

$; 0{,}484375 = 0{,}37_{(8)}$

Trecerea inversă, din octal în zecimal, o deducem din :

$$x = \frac{a_{-1}}{10_{(8)}} + \frac{a_{-2}}{10^2_{(8)}} + \ldots + \frac{a_{-m}}{10^m_{(8)}}.$$

Trecînd pe $10_{(8)}$ în baza zece avem $10_{(8)} = 8$ și trecînd și cifrele numărului x din baza 8 în baza 10 deducem

$$x = \frac{a'_{-1}}{8} + \frac{a'_{-2}}{8^2} + \ldots + \frac{a'_{-m}}{8^m},$$

unde a'_i sînt exprimările cifrelor a_i din baza 8 în baza 10, care de fapt coincid.

Deci

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{-i}}{8^i}.$$

Exemplu :

Să se facă conversia din octal în zecimal pentru numărul : $0{,}176_{(8)}$.

Avem :

$$0{,}176_{(8)} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8^2} + \frac{6}{8^3} = \frac{63}{256} = 0{,}24609375.$$

Observație. Cînd numărul asupra căruia se cere conversia are și întregi și parte zecimală, se aplică separat conversia fiecărei părți și apoi se reconstituie numărul din părțile transformate.

I.7.7. Trecerea părţii fracţionare a unui număr din sistemul zecimal în sistemul hexazecimal şi invers

Ca şi în celelalte cazuri de trecere a unui număr, parte fracţionară, din baza zece în altă bază vom folosi forma numărului scrisă în hexazecimal.
Baza fiind $10_{(16)} = 16$ şi numărul fiind x avem :

$$x = \frac{a_{-1}}{16} + \frac{a_{-2}}{16^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{16^m}.$$

Înmulţindu-l pe x cu 16 se obţine :

$$16x = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{16} + \ldots + \frac{a_{-m}}{16^{m-1}}$$

unde se observă că prima cifră de la partea fracţionară devine singura cifră a părţii întregi a numărului obţinut prin înmulţirea cu 16. Repetînd înmulţirea, se poate continua determinarea cifrelor de la partea fracţionară a numărului. Procedeul fiind analog cu cel de la baza 2, putem utiliza regula de la I.7.1.1 unde în locul bazei 2 avem baza 16.

De asemenea, facem sublinierea că în baza 16 putem avea părţi fracţionare periodice.

Exemplu :

Să se facă conversia din zecimal în hexazecimal a numărului
0,235.

Utilizăm o schemă ca la baza 2, deşi se operează mai greu

(16)	235	76	16	56	96	36	76	; $0{,}235 = 0{,}3(C28F5)_{(16)}$
	0	3	C	2	8	F	5	

Se observă că după şase înmulţiri succesive ale părţii fracţionare cu 16, a apărut aceeaşi parte fracţionară care face să se repete cifrele întregilor obţinuţi prin înmulţire în continuare. Este deci o parte fracţionară periodică.

Trecerea inversă, din hexazecimal în zecimal, o deducem din forma numărului scris în hexazecimal

$$x = \frac{a_{-1}}{10_{(16)}} + \frac{a_{-2}}{10^2_{(16)}} + \ldots + \frac{a_{-m}}{10^m_{(16)}}.$$

Trecînd pe $10_{(16)}$ în baza zece avem $10_{(16)} = 16$ şi trecînd şi cifrele numărului x din baza 16 în baza zece deducem :

$$x = \frac{a'_{-1}}{16} + \frac{a'_{-2}}{16^2} + \ldots + \frac{a'_{-m}}{16^m},$$

unde a'_i sînt exprimările cifrelor a_i în baza zece.

Deci,

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{a'_{-i}}{16^i}.$$

Exemplu :

Să se facă conversia din hexazecimal în zecimal pentru numărul :
$0,2F8_{(16)}$.
Avem :

$$0,2F8_{(16)} = \frac{2}{16} + \frac{15}{16^2} + \frac{8}{16^3} = \frac{760}{4\,096} = \frac{95}{512}.$$

Observație. Cînd numărul asupra căruia se cere conversia are și întregi și parte zecimală, se aplică separat conversia fiecărei părți și apoi se reconstituie numărul din părțile transformate.

Exemplu :

$$36,15 = 36 + 0,15 = 24_{(16)} + 0,22(6)_{(16)} = 24,22(6)_{(16)}.$$

I.7.8. Trecerea numerelor din sistemul binar în sistemul octal și hexazecimal și invers

Pentru această trecere folosim rezultatele de la paragraful I.7.2 și anume regulile de la I.7.2.1 și I.7.2.2 extinse la numere reale.

Deoarece avem $8 = 2^3$, respectiv $16 = 2^4$, urmează că se vor forma grupe de cîte trei, respectiv patru cifre începînd de la virgulă spre stînga și spre dreapta și apoi fiecare grupă de trei, respectiv patru cifre, din baza doi va constitui o cifră în baza opt, respectiv șaisprezece (dacă ultimele grupe formate nu au trei, respectiv patru cifre, se va completa grupa cu zerouri la stînga sau la dreapta după cum împărțirea în grupe s-a făcut la stînga sau la dreapta virgulei).

Pentru ușurință, dăm tabela cu grupele de trei, respectiv patru cifre în binar și echivalentele lor în octal și hexazecimal.

Tabelul I.7

Baza 2	Baza 8	Baza 2	Baza 16	Baza 2	Baza 16
000	0	0000	0	1000	8
001	1	0001	1	1001	9
010	2	0010	2	1010	A
011	3	0011	3	1011	B
100	4	0100	4	1100	C
101	5	0101	5	1101	D
110	6	0110	6	1110	E
111	7	0111	7	1111	F

Exemple :

1. Să se facă conversia din binar în octal şi apoi în hexazecimal a numerelor :

a) 1101110101 ; b) 111,011.

Pentru baza 8 formăm grupe de trei cifre la stînga şi la dreapta virgulei şi cu ajutorul tabelului I.7 în locul fiecărei grupe de trei cifre scriem cifra corespunzătoare în octal.

a) $1101110101_{(2)} = 001.101.110.101_{(2)} = 1565_{(8)}$

b) $111{,}011_{(2)} = 7{,}3_{(8)}$.

Pentru baza 16 formăm grupe de cîte patru cifre şi folosind tabelul I.7 ca în cazul bazei 8 avem

a) $110\ 111\ 0101_{(2)} = 0011.0111.0101_{(2)} = 375_{(16)}$

b) $111{,}011_{(2)} = 0111{,}0110_{(2)} = 7{,}6_{(16)}$.

2. Să se facă conversia din octal în binar pentru numerele :

a) $547_{(8)}$; b) $3{,}25_{(8)}$.

Avem :

a) $547_{(8)} = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{100}_{4}\ \underbrace{111}_{7}\ _{(2)}$

b) $3{,}25_{(8)} = \underbrace{011,}_{3}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}\ _{(2)}$.

3. Să se facă conversia din hexazecimal în binar a numerelor :

a) 7AC ; b) B,0A.

Rezolvare :

a) $7AC_{(16)} = \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{1100}_{C}\ _{(2)}$;

b) $B{,}0A_{(16)} = \underbrace{1011,}_{B}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1010}_{A}\ _{(2)}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Fiecare din următoarele operaţii aritmetice este corectă în cel puţin un sistem de numeraţie. Să se determine bazele posibile ale acestor sisteme.

a) $1\,234 + 5\,432 = 6\,666$;

b) $\dfrac{41}{3} = 13$;

c) $\dfrac{33}{3} = 11$;

d) $23 + 44 + 14 + 32 = 223$;

e) $\dfrac{302}{20} = 12{,}1$;

f) $\sqrt{41} = 5$;

g) $\sqrt{51} = 6$;

h) $\sqrt{31} = 4$;

i) $\sqrt[3]{11} = 2$;

j) $\sqrt{21} = 3$;

k) $\sqrt{61} = 7$;

l) $\sqrt{\overline{a1}} = a + 1,\ a \in \mathbf{N},\ a \geqslant 1$.

2. Se știe că :

a) $16_{(10)} = 100_{(b)}$;

b) $292_{(10)} = 1\,204_{(b)}$.

Să se determine b.

3. Să se arate că :

a) 121 este pătrat perfect în orice bază $b > 2$;

b) 1 331 este cub perfect în orice bază $b > 3$;

c) 14 641 este puterea a 4-a a unui număr, oricare ar fi baza $b > 6$;

d) $(x1)_{(x+2)}$ este pătrat perfect oricare ar fi baza $b = x + 2$.

4. Să se efectueze în baza 2 :

a) 101001 + 110111 + 111010 ;

b) 110001111 − 100011 ;

c) 1101011 − 11011 ;

d) 1111011,01 + 111011,101 + 11,011 ;

e) 10000,001 − 10,011 ;

f) 110110,1011 · 101101,011 ;

g) 11011011,011 : 1,1.

5. Dîndu-se în baza 2 numerele :

$a = 1001{,}11001$;

$b = 1111{,}00011$;

$c = 1010{,}10101$;

să se calculeze :

1° $a + b - c$; 2° $a - b + c$; 3° $-a + b + c$; 4° $\frac{a+b}{c}$; 5° $\frac{bc}{a}$;

6° $\frac{a+b+c}{abc}$.

6. Să se efectueze în baza 16 :

a) ABCDEF + FEDCBA + 12 345 + 54 321 ;

b) BEC − AC + FAC ;

c) AB1 · 7A ;

d) B4 : 6 ;

e) 18A,36 + 0,A72 + D,A5 ;

f) FA,2 · 2,3D.

7. Se dau în baza 16 următoarele numere :

a = 12A,25 ;

b = 108,4E ;

c = FF,34.

Să se calculeze :

1° $4a + 3b - 2c$; 2° $3a - 2b + 4c$; 3° $-2a + 4b + 3c$.

8. Să se treacă următoarele numere dintr-o bază în alta prin intermediul bazei 10.

a) $1\ 342_{(5)} = x_{(7)}$; b) $1\ 804_{(9)} = x_{(4)}$; c) $32{,}3_{(6)} = x_{(4)}$.

9. Să se facă conversia de la baza 3 la baza 9 a numerelor :

12 101 102 ; 211 022 ; 1 021.

10. Să se facă conversia de la baza 9 la baza 3 a numerelor :

7 568 ; 237,463.

11. Să se facă conversia de la baza 2 la bazele 4, 8 şi 16 a numerelor :

1110111101001 ; 110011,01011.

12. Să se facă conversia de la baza 4 la baza 16 a numerelor :

313 312 001 ; 1 230 231,13201.

13. Să se facă conversia de la baza 16 la bazele 8, 4 şi 2 a numerelor :

1AB5D8F ; DE4A,19A3.

14. Să se facă conversia de la baza 10 la baza 2 a numerelor :

7 539 432 ; 0,5735 ; 4 726,875.

15. Să se facă conversia de la baza 2 la baza 10 a numerelor :

1001101 ; 0,11101 ; 11,0101.

16. Să se facă conversia de la baza 10 la baza 16 a numerelor :

5 379 ; 0,8475 ; 325,75.

17. Să se facă conversia de la baza 16 la baza 10 a numerelor :

A0FD ; 0,ABC ; 2E,125.

18. Numărul 1 000, scris în baza 10, să fie scris în toate bazele de la 2 la 16 (în afară de zece în care se află deja scris).

Indicaţii şi răspunsuri

1. a) $b \geqslant 7$; b) 8 ; c) $b \geqslant 4$; d) 5 ; e) 4 ; f) 6 ; g) 7 ; h) 5 ; i) 7 ; j) 4 ; k) 8 ; l) $a + 2$. **2.** a) $b = 4$; b) $b = 6$. **3.** a) $121 = b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$; b) ; c) ; d), analog cu a). **4—5.** Se folosesc tabelele I.1 şi I.2. **6—7.** Se folosesc tabelele I.5 şi I.6. **8.** a) $x_{(7)} = 435_{(7)}$; b) $x_{(4)} = 111\ 211_{(4)}$; c) $x_{(4)} = 110{,}2_{(4)}$; **9 — 13.** Se folosesc exemplele de la I.7.8 şi regulile de la I.7.2.1 şi I.7.2.2. **14—17.** Se folosesc exemplele de la I.7.4 şi I.7.5.

II
PRELUCRAREA AUTOMATĂ A DATELOR

II.1. Informația și informatica

Mulțimea și diversitatea informațiilor din lumea actuală („explozia informațională") și dezvoltarea impetuoasă a tehnicii de calcul, au dus la apariția unei noi științe — *informatica*. Termenul de informatică a fost introdus în 1968, fiind sugerat de asocierea informație—automatică. Inițial, informatica a fost definită ca știința prelucrării informației, îndeosebi cu mijloace automate.

Deci obiectul acestei noi științe îl constituie informația. Dar ce este informația ?

S-a încercat definirea informației în diferite moduri, de exemplu :

- fiecare dintre elementele noi, în raport cu cunoștințele prealabile, cuprinse în semnificația unui simbol sau a unui grup de simboluri ;
- formulă scrisă, susceptibilă de a aduce o cunoștință ;
- comunicare, știre, veste ;
- expresie a unui mesaj, prin care se exprimă starea unui fenomen dintr-o anumită activitate, reprezentată printr-un număr, un cuvînt sau un șir de caractere convenționale.

Diferite definiții ale informației reliefează aspecte specifice ale acestei noțiuni. Astfel, distingem : *aspectul semantic*, reflectînd cunoașterea, sens atribuit unei anumite reprezentări ; *aspectul sintactic*, reprezentînd forma căreia i se poate atribui un sens și *aspectul de comunicare*.

Pentru a putea fi percepută, informația trebuie reprezentată pe un suport de informație.

Prin *suport de informație* se înțelege orice mediu material care poate suferi transformări temporare sau permanente, în vederea reprezentării informației. Astfel, creierul uman, moleculele de acizi nucleici, undele sonore și electromagnetice, hîrtia de scris, tabla, banda de magnetofon sînt numai cîteva exemple de suporturi de informație.

În procesul de prelucrare a informațiilor participă *date*, sensul informației fiind exprimat sau extras din acestea.

II.2. Codificarea informaţiilor

Informaţia semantică poate fi considerată ca un ansamblu de trei elemente:

- *entitatea* (obiectul informaţiei);
- *atributul* (element de descriere a entităţii respective, proprietate sau caracteristică a obiectului);
- *valoarea* (măsură a atributului).

De exemplu:

a) *manual* ↓ entitate	*preţul în lei* ↓ atribut	*5,20* ↓ valoare
b) *autoturism* ↓ entitate	*marcă* ↓ atribut	*SKODA* ↓ valoare

O entitate poate avea mai multe atribute, fiecăruia corespunzîndu-i mai multe valori. De exemplu, entitatea autoturism poate avea pe lîngă atributul marcă şi atributele culoare, proprietar.

Pentru a reprezenta informaţiile se recurge la *codificare*.

Un **cod** se defineşte prin: *alfabet, structură gramaticală* (*sintaxă*) şi *atribuire semantică*.

Alfabetul este o mulţime finită de simboluri (semne) numite *caractere* (de exemplu, literele de la *A* la *Z*, cifrele 0, . . ., 9).

Sintaxa reprezintă ansamblul regulilor de formare a şirurilor de simboluri care aparţin limbajului de codificare respectiv.

Semantica reprezintă semnificaţia şirurilor de caractere construite respectînd regulile sintactice.

Construcţiile realizate cu caracterele din alfabet se numesc *cuvinte* (coduri). Cuvintele se constituie în cadrul unui *format*, ceea ce implică limitarea caracterelor utilizabile pentru anumite poziţii din cuvînt sau restricţii referitoare la ordinea lor. Lungimea cuvintelor poate fi fixă (toate cuvintele au acelaşi număr de caractere) sau variabilă.

Dacă formatul limitează lungimea codurilor la n caractere şi alfabetul are m caractere distincte, atunci numărul total de coduri distincte care se pot forma este m^n.

Operaţia inversă codificării se numeşte *decodificare*.

În prelucrarea automată a datelor se folosesc *coduri binare* (alfabetul este format din două caractere, notate 0 şi 1). Codificarea binară a fost impusă de faptul că funcţionarea unui calculator se bazează pe elemente cu două stări stabile.

II.3. Arhitectura și structura unui sistem de calcul

Un calculator electronic este un ansamblu de componente electronice, programabil, care poate memora date și efectua cu ele operații (de exemplu, aritmetice și logice).

Pentru a stabili funcțiile pe care trebuie să le îndeplinească un calculator în vederea prelucrării datelor, vom utiliza analogia cu prelucrarea datelor de către om.

Într-adevăr, creierul uman, împreună cu restul sistemului nervos, constituie unul din cele mai complexe sisteme de prelucrare a datelor. El posedă în permanență informații asupra sa și asupra modificărilor care apar în lumea înconjurătoare.

Prin organele de simț recepționăm informații din lumea înconjurătoare. Acestea sînt stocate de memoria noastră ; intervine apoi inteligența care comandă un proces de gîndire prin care se valorifică informațiile, după anumite reguli de prelucrare. Rezultatele prelucrării sînt transmise din nou memoriei. Cunoștințele astfel căpătate le comunicăm lumii exterioare fie prin vorbire, fie prin scriere, acțiuni, gestică. Schematic, acest proces este reprezentat în figura II.1.

În principiu, un calculator electronic trebuie să fie capabil să îndeplinească aceleași funcții ca și calculatorul uman, adică :

- *introducerea datelor* (de exemplu, citirea lor de pe cartele perforate) ;
- *memorarea datelor ;*
- *prelucrarea datelor ;*
- *controlul prelucrării ;*
- *extragerea datelor* (de exemplu, imprimarea rezultatelor sau afișarea lor pe un ecran).

În vederea realizării acestor funcții un sistem de calcul cuprinde echipamente de calcul (hardware) și un sistem de programe (software).

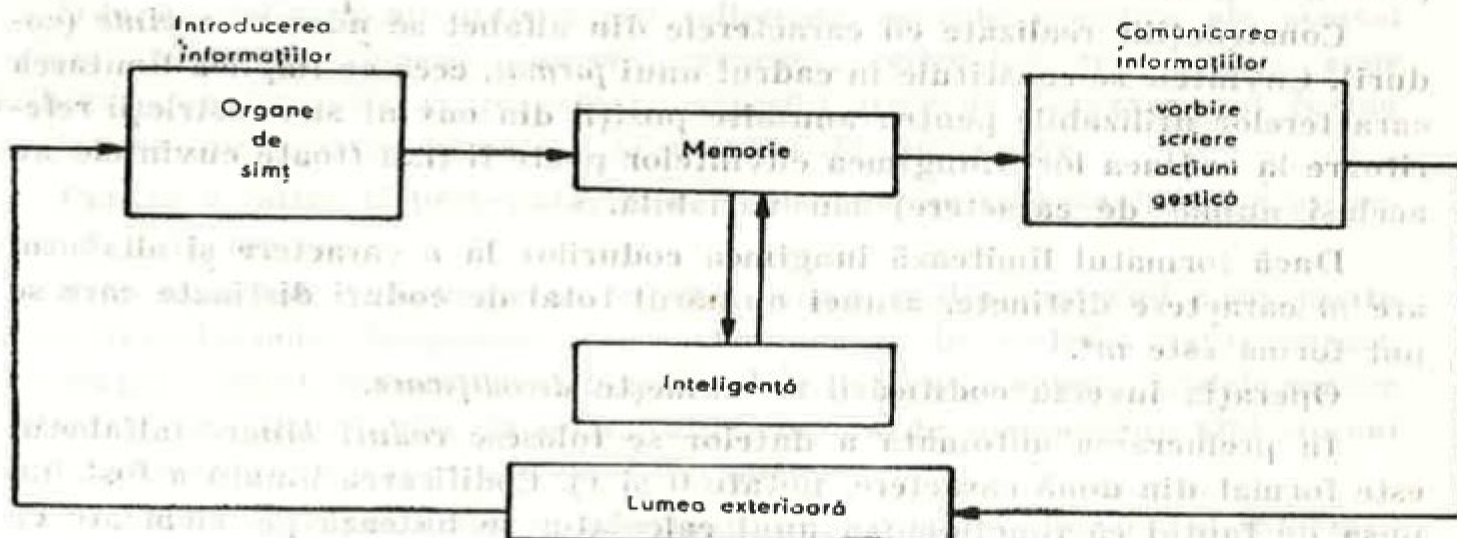


Fig. II.1

Fig. II.2

Echipamentele de calcul componente sînt descrise în figura II.2.

Unitatea de memorie asigură *păstrarea* datelor (programe, date de prelucrat, rezultate ale prelucrării) care participă într-un proces de prelucrare, *înregistrarea* și *restituirea* datelor la cererea celorlalte unități ale calculatorului. Memoria este constituită dintr-un ansamblu de elemente numite *celule binare*.

Cantitatea de informație ce poate fi înregistrată într-o celulă de memorie se numește *bit*, unui bit fiindu-i asociată valoarea 0 sau 1. Celulele binare sînt grupate în *locații de memorie*. Fiecare locație se identifică printr-un număr, care indică poziția ei în memorie. Acest număr se numește *adresă*. Prin intermediul adresei se realizează *accesul* la informațiile din memorie.

Informația dintr-o locație se numește *octet* sau *bait* (1 octet = 8 biți). 1 024 octeți constituie 1 kilooctet (1 K).

Numărul maxim de octeți ce pot fi înregistrați în memorie determină *capacitatea memoriei*.

Intervalul de timp între emiterea unei cereri de acces la informații din memorie și momentul rezolvării ei se numește *timp de acces* (de obicei mai mic de 1μ sec).

O memorie este cu atît mai performantă cu cît are o capacitate mai mare și un timp de acces mai mic.

Unitatea centrală asigură prelucrarea propriu-zisă și comandă funcționarea celorlalte componente. Unitatea centrală dispune și de un *panou de comandă*, constituit dintr-un ansamblu de beculețe și comutatoare, care permite dialogul dintre operatorul la calculator și sistem. O parte din aceste funcții pot fi realizate și cu ajutorul altei componente — *consola operator*.

Sistemul de intrare-ieșire asigură schimbul de informații între mediul exterior și calculator.

În cadrul unui sistem de calcul distingem două categorii de suporturi de informaţie :

● *suporturi interne*, încorporate în echipamentele de calcul (de exemplu, memoria internă, registrele unităţii centrale) şi

● *suporturi externe*, utilizate pentru înregistrarea datelor de intrare sau a datelor de ieşire sau pentru înregistrarea şi păstrarea pe o perioadă mai mare de timp a unor date aferente unui proces de prelucrare. Cele mai utilizate suporturi externe de informaţii sînt : cartela perforată, banda de hîrtie perforată, hîrtia de imprimat, banda magnetică şi discul magnetic. Suporturile externe sînt exploatate prin intermediul unor echipamente speciale, numite *echipamente periferice* sau *dispozitive periferice*.

Sistemul de programare este la rîndul lui alcătuit din două componente : sistemul de operare şi programele de aplicaţie.

Sistemul de operare cuprinde o mulţime de programe avînd rolul de a mări performanţele calculatorului prin furnizarea de facilităţi care nu sînt prevăzute de hardware. De exemplu, asigură încărcarea automată a programelor în memorie, traducerea în limbaj maşină a programelor scrise în limbaje simbolice, controlează execuţia programelor şi detectează automat unele tipuri de erori etc.

Programele de aplicaţii sînt programele utilizatorilor. În cadrul acestora o categorie deosebită o constituie programele de aplicaţii standard, de tipul programelor pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii, pentru calculul cu matrice, programele de gestiune etc., care sînt înregistrate pe un suport extern de informaţie şi puse la dispoziţia oricărui utilizator.

II.4. Limbaje de programare

Calculatorul poate rezolva orice problemă dacă *i* se specifică *cum* să o rezolve.

O problemă poate fi rezolvată cu calculatorul dacă s-a găsit o schemă de rezolvare, respectiv un algoritm.

Algoritmul este o succesiune de indicaţii univoc prezentate, care descriu modul de rezolvare a unor probleme de acelaşi tip, descrierea fiind exactă şi completă şi cuprinzînd un număr finit de paşi.

O dată stabilit un algoritm, el este de obicei reprezentat grafic sub forma unei *scheme logice*, pentru a putea fi mai uşor de urmărit. Plecînd de la această reprezentare grafică se scrie apoi *programul* (reprezentarea algoritmului

într-un limbaj de programare). Programul este înregistrat pe un suport de informaţie şi comunicat calculatorului.

Reuşita unei activităţi de prelucrare automată a datelor depinde în mare măsură de calitatea algoritmului şi a programului, calculatorul executînd numai ceea ce i-a fost indicat de program.

Iniţial programele erau scrise direct în limbaj maşină, fiind foarte dificil de elaborat şi verificat. O dată cu dezvoltarea sistemelor de operare au apărut limbaje de programare mai apropiate de limbajul natural, numite limbaje evoluate. Astfel de limbaje sînt :

- FORTRAN (FORmula TRANslation) destinat scrierii de programe pentru aplicaţii tehnico-ştiinţifice ;
- COBOL (COmmon Business Oriented Language) pentru programele de aplicaţii din domeniul economic ;
- BASIC (Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code), destinat unui domeniu larg de aplicaţii.

În afară de limbajele evoluate, există şi o categorie intermediară — limbajele de asamblare, care de fapt reprezintă o exprimare prin simboluri a limbajului maşină. Exemple de limbaje de asamblare sînt : ASSIRIS (pentru calculatoarele FELIX), MACRO (pentru minicalculatoarele FELIX-M).

În general, limbajele evoluate sînt independente de sistemul de calcul, în timp ce limbajele de asamblare sînt specifice unui anumit sistem de calcul.

II.5. Dezvoltare de programe

Programele sînt scrise în limbaje simbolice, uşor accesibile programatorului. Pentru a putea fi executate, ele vor trebui traduse în limbaj maşină. Transformarea programelor într-o formă acceptată de calculator este preluată de sistemul de operare. Această operaţie se realizează de obicei în două faze, prin execuţia unor programe ale sistemului de operare : programul *compilator* pentru limbajul în care este scris programul utilizatorului şi *editorul de legături* care transformă programul compilat într-un program direct executabil. Programul direct executabil este încărcat în memorie şi apoi lansat în execuţie (fig. II.3).

Deci fazele de dezvoltare ale unui grup sînt :

- compilarea ;
- editarea de legături ;
- execuţia propriu-zisă.

Fazele de dezvoltare se comunică sistemului prin comenzi speciale.

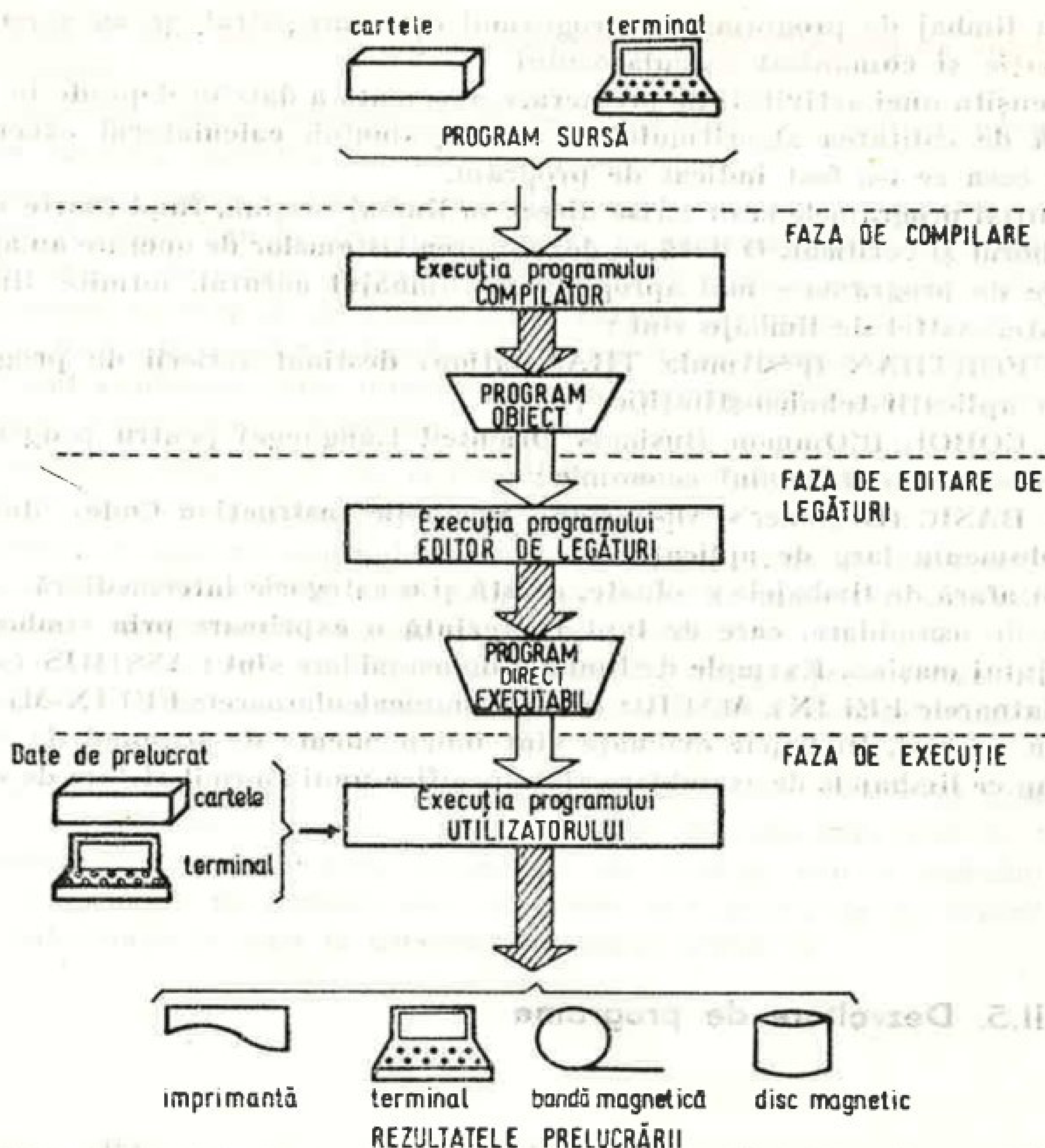


Fig. II.3

II.6. Informatica în România

La noi în ţară preocupările în domeniul tehnicii de calcul datează din 1950.

În 1957, la Institutul de Fizică Atomică s-a construit primul calculator electronic românesc CIFA-1. Acesta era un calculator din generaţia I* avînd o viteză de calcul de 50 operaţii/secundă.

* În tabelul II.1 se face o trecere succintă în revistă a generaţiilor de calculatoare şi a principalelor caracteristici.

Tabelul II.1

Generații de calculatoare

Generația	Anul apariției	Tehnologie	Tip de memorie internă	Facilități oferite utilizatorilor
1	1950	• relee • tuburi electronice	• tuburi catodice • linii de întîrziere	• programare în cod mașină • apare „programul memorat"
2	1955	• tranzistori • semiconductori	• ferite	• apar limbaje mai evoluate și deci compilatoare pentru aceste limbaje • transferul datelor este preluat de unități speciale — unități de schimburi (canale)
3 FELIX C-256 FELIX C-512 FELIX C-1024	1968	• circuite integrate	• inele de ferită	• limbaje evoluate • sisteme de operare pentru familii de calculatoare • multiprogramare • multiprelucrare • prelucrări în timp real
3,5 CORAL INDEPENDENT M-18 M-118 ECAROM	1973	• circuite integrate (MSI, LSI)	• circuite integrate	• memorii foarte rapide • ridicarea restricțiilor legate de dimensiunea memoriei interne • software pentru baze de date • prelucrare distribuită

La Timişoara s-au realizat calculatoare din seria MECIPT, iar la Cluj-Napoca, DACICC.

O deosebită importanţă în promovarea informaticii în ţara noastră au avut-o cursurile de calculatoare organizate la Bucureşti, încă din 1957, de Gr. C. Moisil şi la Cluj-Napoca de Tiberiu Popoviciu, activitate continuată cu succes de un număr din ce în ce mai mare de discipoli.

În 1967, conducerea partidului a aprobat un program de dotare cu tehnică de calcul şi automatizare a prelucrării datelor. S-au înfiinţat centre teritoriale de calcul electronic (CTCE) precum şi centre de calcul în cadrul unor întreprinderi. De asemenea, s-au pus bazele unei industrii electronice proprii, trecîndu-se la realizarea de componente electronice pentru tehnică de calcul. O atenţie deosebită s-a acordat pregătirii de cadre de specialitate, prin instituţii de învăţămînt superior, centre de perfecţionare şi unele licee.

Din 1968 a început fabricarea în ţara noastră a unor calculatoare electronice din generaţia a 3-a, FELIX C-256.

Alături de acestea, s-au realizat prin concepţie proprie noi calculatoare din familia FELIX : C-512, C-1024, C-32.

În prezent, producem sisteme de calcul cu o arhitectură modernă, bazîndu-ne pe tehnologii avansate : familia de minicalculatoare FELIX-M (INDEPENDENT I-100, I-102F şi CORAL 4001, 4011, 4030), microcalculatoarele M-18, M-118, ECAROM, CUB, JUNIOR şi calculatoarele profesionale şi individuale : FELIX-PC, HC-85, aMIC, PRAE şi TIM-S. Apariţia calculatoarelor profesionale şi individuale va facilita răspîndirea tehnicii de calcul în mediile neindustriale şi va permite familiarizarea elevilor, încă din ciclul gimnazial, cu calculatorul electronic.

III

OPERAȚII ARITMETICE ȘI OPERAȚII LOGICE

III.1. Noțiuni introductive

Din școala generală cunoaștem că mulțimea numerelor reale $\mathbf{R}$ este formată din reuniunea a două submulțimi disjuncte, mulțimea numerelor raționale $\mathbf{Q}$ și mulțimea numerelor iraționale $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

De asemenea, cunoaștem din capitolul I că orice număr real se poate scrie într-o bază oarecare, deci și în baza zece, ca o succesiune de cifre la partea întreagă și o succesiune de cifre la partea zecimală. În practică, în calcule, nu totdeauna utilizăm sau putem utiliza un anumit număr real, mai ales în cazul numerelor iraționale. De aceea ori de cîte ori tehnica de lucru se ușurează, fără ca rezultatele să devină inutilizabile, se vor putea folosi, în locul oricăror numere reale, valori apropiate ale acestora, numite valori aproximative sau, simplu, aproximante.

III.2. Aproximantele numerelor reale

Noțiunea de aproximantă (valoare care aproximează un anumit număr) o vom utiliza pentru orice număr real care urmează a fi folosit în calcule.

De aceea, considerînd x un număr real oarecare ($x \in \mathbf{R}$), pentru aproximantele lui x dăm următoarea :

III.2.1. *Definiție.* **Numim aproximantă a unui număr real x orice număr rațional x^* care poate fi folosit în calcule în locul numărului x.**

Exemplu :

Dacă $x = 24{,}235$, atunci numerele 20 ; 24 ; 25 ; 24,2 ; 24,3 ; 24,23 ; 24,24 ; 10 ; 100 ; 100 000 și oricare altele pot fi considerate ca aproximante ale lui x.

Mulțimea aproximantelor lui x o vom aprecia ca avînd două submulțimi, o submulțime formată cu aproximantele mai mici decît x, ale cărei elemente le vom numi aproximante prin lipsă, notate cu $\underline{x}$, și o submulțime formată cu aproximantele mai mari decît x ale cărei elemente le vom numi aproximante prin adaos sau aproximante prin exces, notate cu $\bar{x}$.

A considera pentru un număr real x o aproximantă x^*, înseamnă a aproxima numărul real x cu aproximanta x^*.

III.3. Procedee de aproximare a numerelor reale

III.3.1. Aproximări prin rotunjire la numerele cu parte zecimală (regula completării)

Fie un număr real x care are cel puţin n cifre la partea zecimală. Dorim să-l aproximăm cu o aproximantă a sa care să aibă n cifre la partea zecimală. Putem fi în unul din următoarele două cazuri:

a) cifra $a_{-(n+1)}$ este una dintre cifrele 0, 1, 2, 3, 4, şi în acest caz se renunţă la această cifră precum şi la cele de la dreapta ei;

b) cifra $a_{-(n+1)}$ este una din cifrele 5, 6, 7, 8, 9 şi în acest caz adunăm la număr $\frac{1}{10^n}$ şi renunţăm la ultimele cifre zecimale, începînd cu poziţia a $n+1$-a.

Spunem că atît în cazul a) cît şi în cazul b) am efectuat o aproximare prin rotunjire.

III.3.1.1. *Regulă.* Aproximarea prin rotunjire a unui număr real cu cel puţin n zecimale, se face prin lipsă sau prin exces la zecimala a n-a, renunţînd la zecimalele care-i urmează, zecimala a n-a rămînind neschimbată sau majorată cu o unitate după cum zecimala care-i urmează este o cifră mai mică decît cinci sau mai mare ori egală cu cinci.

III.3.1.2. *Observaţii:*

1. Aproximanta obţinută prin rotunjire la III.3.1. a) este o aproximantă prin lipsă cînd numărul real este pozitiv.

2. Aproximanta obţinută prin rotunjire la III.3.1. b) este o aproximantă prin exces cînd numărul real este pozitiv.

Exemple:

1) Numărul $x = 2,8435$ dorim să fie scris doar cu două zecimale, aproximat prin rotunjire, deci $n = 2$. Deoarece $a_3 = 3$ şi $3 < 5$, atunci $\underline{x} = 2,84$ reprezintă o aproximantă prin lipsă.

2) Numărul $x = 324,76583$ dorim să fie scris doar cu trei zecimale, aproximat prin rotunjire, deci $n = 3$. Deoarece, $a_4 = 8$ şi $8 > 5$, atunci $\bar{x} = 324,766$ reprezintă o aproximantă prin exces.

III.3.2. Aproximări prin rotunjire la numerele întregi (regula completării)

Se dă un număr întreg x cu cel puţin atîtea cifre cît este ordinul la care vrem să facem aproximarea. Dorim să-l aproximăm la una dintre cifrele: unităţilor, zecilor, sutelor, miilor etc. Notăm cu k acest ordin şi cu $k-1$, ordinul imediat inferior. Procedăm ca în unul din următoarele două cazuri:

a) înlocuim cu zerouri toate cifrele de la dreapta cifrei de ordinul k, dacă cifra de ordin $k-1$ este una dintre cifrele 0, 1, 2, 3, 4;

b) adunăm 10^k cu numărul dat şi înlocuim toate cifrele de la dreapta cifrei de ordinul k prin zerouri cînd cifra de ordin $k - 1$ este una dintre cifrele 5, 6, 7, 8, 9.

Spunem că atît în cazul a) cît şi în cazul b) am efectuat o aproximare prin rotunjire.

III.3.2.1. *Regulă.* Aproximarea prin rotunjire a unui număr întreg la o cifră de un anumit ordin fixat se face prin lipsă sau prin exces, înlocuind prin zerouri cifrele care urmează cînd prima cifră care-i succede este mai mică decît 5, sau majorînd cifra fixată cu o unitate şi înlocuind toate cifrele care-i urmează cu zerouri, dacă prima cifră care-i succede este mai mare ori egală cu cinci.

III.3.2.2. *Observaţii :*

1. Aproximanta obţinută prin rotunjire la III.3.2. a) este o aproximantă prin lipsă cînd $x > 0$.

2. Aproximanta obţinută prin rotunjire la III.3.2. b) este o aproximantă prin exces cînd $x > 0$.

Notînd cu c cifra de ordin k şi cu d cifra de ordin $k - 1$ în următoarele exemple avem :

1. Numărul $x = 7589345$ dorim să-l aproximăm la cifra miilor prin rotunjire, deci $c = 9$. Pentru că $d = 3$ şi $3 < 5$, atunci $\bar{x} = 7589000$ reprezintă o aproximantă prin lipsă.

2. Numărul $x = 47979463$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor de mii prin rotunjire, deci $c = 7$. Pentru că $d = 9$ şi $9 > 5$, atunci $\bar{x} = 47980000$ reprezintă o aproximantă prin exces.

3. Numărul $x = -32456$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor prin rotunjire, deci $c = 5$. Pentru că $d = 6$ şi $6 > 5$, atunci $\bar{x} = -32460$ reprezintă o aproximantă prin lipsă.

4. Numărul $x = -83459478$ dorim să-l aproximăm la cifra miilor prin rotunjire, deci $c = 9$. Pentru că $d = 4$ şi $4 < 5$, atunci $\bar{x} = -83459000$ reprezintă o aproximantă prin exces.

5. Numărul $x = 573499953$ dorim să-l aproximăm la cifra sutelor prin rotunjire, deci $c = 9$. Pentru că $d = 5$, atunci $\bar{x} = 573500000$.

6. Numărul $x = 15700000$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor de mii sau la orice cifră de la dreapta ei. În acest caz $\bar{x} = \underline{x} = x$.

III.3.3. Aproximarea prin rotunjire efectuată la maşinile de calcul

În aproximarea prin rotunjire este necesară comparaţia cifrei la care se face rotunjirea cu cifra 5 precum şi cercetarea semnului numărului pentru a se putea decide în ce mod se face rotunjirea (prin lipsă sau prin exces).

Deoarece, pentru mașinile de calcul această operație este complicată și poate duce uneori la un consum mare de timp, se înlocuiește operația de comparare cu o operație de adunare.

Astfel, în cazul în care x este un număr real scris sub formă de fracție zecimală cu cel puțin n zecimale și dorim să-l scriem printr-o aproximantă cu n zecimale, adunăm la acest număr numărul cu același număr de zecimale și același semn cu el avînd toate zecimalele zerouri în afară de zecimala a $n + 1$-a care este 5. Rezultatului astfel obținut i se neglijează cifrele după zecimala a n-a. Aproximanta obținută este o aproximantă prin rotunjire.

Exemple:

1) Numărul $x = 68{,}975342$ dorim să fie scris cu patru zecimale, deci $n = 4$. Îi adunăm numărul 0,000050 și avem $68{,}975342 + 0{,}000050 = 68{,}975392$. La rezultatul astfel obținut se neglijează zecimalele de după zecimala a 4-a, obținîndu-se $x = 68{,}9753$, rezultat identic cu cel ce s-ar fi obținut aplicînd rotunjirea.

2) Numărul $x = -732{,}84526$ dorim să fie scris cu două zecimale, deci $n = 2$. Îi adunăm numărul $-0{,}00500$ și avem $-732{,}84526 - 0{,}00500 = -732{,}85026$. La rezultatul astfel obținut se neglijează zecimala de după zecimala a 2-a, obținîndu-se $x = -732{,}85$, rezultat identic cu cel ce s-ar fi obținut aplicînd rotunjirea.

Fie acum cazul în care x este un număr întreg cu n cifre și dorim să-l rotunjim la o cifră de un anumit ordin k și care este una din cifrele: unități, zeci, sute, mii etc. Pentru aceasta adunăm la numărul dat numărul de același semn cu el, cu un număr de cifre egal cu numărul de cifre de la dreapta cifrei de ordin k, avînd prima cifră 5, iar următoarele cifre zerouri. Rezultatului astfel obținut i se substituie cifrele de după cifra de ordin k prin zerouri.

Exemple:

1) Numărul $x = 97\,351\,942$ dorim să-l aproximăm la cifra zecilor de mii, deci la a 5-a cifră de la dreapta la stînga. Îi adunăm numărul de patru cifre de același semn avînd prima cifră 5 și celelalte zerouri, și avem $97\,354\,942 + 5\,000 = 97\,359\,942$. La rezultatul obținut se substituie ultimele 4 cifre cu zerouri. Obținem: $x = 97\,350\,000$.

2) Numărul $x = -475\,394\,278$ dorim să-l aproximăm la ordinul zecilor de milioane, deci la a 8-a cifră de la dreapta la stînga. Îi adunăm numărul de 7 cifre de același semn avînd prima cifră de 5 și celelalte zerouri, și avem $-475\,394\,278 - 5\,000\,000 = -480\,394\,278$. La rezultatul astfel obținut se substituie ultimele 7 cifre cu zerouri. Se obține $x = -480\,000\,000$.

III.3.4. Aproximarea canonică sau prin trunchiere

De foarte multe ori, mai ales în operații cu numere, cînd ne interesează aproximante ale rezultatelor, sîntem conduși a considera aproximante care să rețină numai un anumit număr de zecimale sau cifrele de la un anumit ordin în sus. Spunem că în acest caz facem o aproximare canonică sau prin trunchiere.

Fie un număr real x scris sub formă de fracție zecimală cu cel puțin n zecimale, pe care vrem să-l aproximăm folosind forma canonică reținînd n

zecimale. Pentru aceasta se renunţă la toate zecimalele de după zecimala a n-a, obţinîndu-se o aproximantă a numărului x.

III.3.4.1. *Regulă.* Pentru aproximarea canonică a unui număr real x scris sub formă de fracţie zecimală cu cel puţin n zecimale din care vrem să reţinem primele p zecimale ($p \leqslant n$) vom renunţa la ultimele $n - p$ zecimale.

Exemple:

1) Numărul $x = 0{,}4597323$ dorim să-l aproximăm, folosind aproximaţia canonică, reţinînd primele 4 zecimale. Deci $x = 0{,}4597$.

2) Numărul $x = -23{,}579432$ dorim să-l aproximăm, folosind aproximaţia canonică, reţinînd primele două zecimale. Deci $\bar{x} = -23{,}57$.

Pentru un număr întreg x cu cel puţin n cifre, aproximarea canonică de un anumit ordin înseamnă a înlocui cifrele care se află la dreapta cifrei de acel ordin cu zerouri, obţinîndu-se astfel o aproximantă a numărului x.

III.3.4.2. *Regulă.* Pentru aproximarea canonică a unui număr întreg x cu cel puţin n cifre, din care vrem să reţinem primele $p (p \leqslant n)$ cifre (de la stînga) ale numărului, substituim ultimele $n - p$ cifre (de la dreapta) ale numărului cu zerouri.

Exemplu:

Numărul $x = 13\,984\,572$ dorim să-l aproximăm, folosind aproximaţia canonică, reţinînd primele patru cifre (de la stînga). Avem $\underline{x} = 13\,980\,000$, care este o aproximantă a lui x.

III.4. Erori şi tipuri de erori

III.4.1. Noţiunea de eroare

Cînd înlocuim un număr real x cu altul x^*, care se numeşte aproximantă a numărului x, atunci această aproximantă x^* exprimă pe x cu un anumit grad de exactitate sau precizie. Evident, cu cît x^* este mai apropiat de valoarea lui x, cu atît x^* aproximează mai bine pe x.

Pentru măsurarea gradului de precizie cu care o aproximantă x^* aproximează pe x vom căuta să ştim care este diferenţa dintre aproximanta x^* şi numărul x pe care îl aproximează şi această diferenţă o vom numi eroare.

III.4.1.1. *Definiţie.* **Se numeşte eroare a unei aproximante faţă de numărul real aproximat, diferenţa între aproximantă şi numărul real pe care îl aproximează.**

Notînd numărul cu x, aproximanta sa cu x^* şi eroarea aproximantei cu ε vom avea, potrivit definiţiei, relaţia:

$$\varepsilon = x^* - x.$$

Deoarece aproximanta unui număr real poate fi prin lipsă sau prin exces, putem avea eroarea dată de una din următoarele două relaţii:

$$\varepsilon = \underline{x} - x \text{ sau } \varepsilon = \bar{x} - x.$$

Însă din $\underline{x} < x$ rezultă $\underline{x} - x < 0$, adică $\varepsilon < 0$, iar din $\bar{x} > x$ rezultă $\bar{x} - x > 0$, adică $\varepsilon > 0$, ceea ce înseamnă că eroarea unei aproximante poate fi negativă sau pozitivă.

III.4.1.2. *Definiție.* **Spunem că aproximanta x^* a unui număr real x este prin exces sau prin lipsă după cum eroarea aproximantei x^* este pozitivă sau negativă.**

Exemplu :

Fie numărul $x = 279,453$ și două aproximante ale sale $\underline{x} = 279,45$ și $\bar{x} = 279,5$. Erorile ce corespund celor două aproximante sînt :

$$\varepsilon = -0,003 \text{ și } \varepsilon = 0,047.$$

III.4.2. Eroare absolută, eroare absolută maximă

În definirea noțiunii de eroare am constatat că eroarea poate fi atît pozitivă cît și negativă. Deoarece în foarte multe cazuri nu are importanță semnul erorii, ci interesează mărimea acesteia, vom defini noțiunea de eroare absolută.

III.4.2.1. *Definiție.* **Eroarea absolută a unei aproximante este valoarea absolută a erorii sale.**

Potrivit definiției, pentru un număr real x și o aproximantă a sa x^* eroarea absolută va fi $|x^* - x|$. Vom nota eroarea absolută cu a unde $a > 0$. Avem deci relația :

$$a = |x^* - x|.$$

Cunoașterea erorii absolute a unei aproximante ne permite să dăm o încadrare a numărului real :

$$(|x^* - x| = a) \Leftrightarrow (x^* - a \leqslant x \leqslant x^* + a).$$

Noțiunea de eroare absolută ne permite să facem aprecieri asupra aproximării numărului de către o aproximantă sau alta. Astfel dacă x_1^* și x_2^* sînt două aproximante ale aceluiași număr real x și dacă $a_1 < a_2$ spunem că x_1^* aproximează mai bine pe x decît x_2^* și deci x_1^* este o aproximantă mai bună a lui x decît x_2^*.

Exemplu :

Fie numărul $x = 1,45724$ cu aproximantele $x_1^* = 1,457$ și $x_2^* = 1,46$ cu erorile absolute $a_1 = 0,00024$ și $a_2 = 0,00276$. Deoarece $a_1 < a_2$ aproximanta x_1^* aproximează mai bine pe x decît x_2^* sau, ceea ce este totuna, x_2^* aproximează mai slab pe x decît aproximanta x_1^*.

Este de remarcat că media aritmetică a două aproximante ale aceluiași număr este o aproximantă mai bună decît cel puțin una din cele două.

Exemplu :

Fie numărul $x = 21{,}548$ cu aproximantele $x_1^* = 21{,}54$ și $x_2^* = 21{,}55$. Erorile fiind date de $\varepsilon_1 = -0{,}008$ și $\varepsilon_2 = 0{,}002$, media aritmetică a aproximantelor este $x^* = \frac{21{,}54 + 21{,}55}{2} = 21{,}545$ iar eroarea pentru noua aproximantă este $\varepsilon = 0{,}003$. Deci noua aproximantă x^* este mai bună decît x_1^* dar mai slabă decît x_2^*.

În operațiile aritmetice cu aproximanțe, în foarte multe cazuri, sîntem în situația că diferite operații conduc la erori diferite, ceea ce face ca în general să ne punem problema cunoașterii sau determinării celei mai mari erori pentru a putea estima nivelul preciziei cu care se lucrează. De aceea vom introduce noțiunea de eroare absolută maximă prin următoarea

III.4.2.2. *Definiție.* **Numim eroare absolută maximă pentru toate aproximantele x_i^* pentru numărul real x, cel mai mic număr A care satisface inegalitatea $A \geq \max(a_i)$, unde a_i sînt erorile absolute ale aproximantelor x_i^*.**

Este evident că pentru un singur număr x și pentru o singură aproximantă a sa x^* eroarea absolută maximă este chiar eroarea absolută a acelei aproximante, deoarece $a \leq a$ pentru orice a. De aceea vom utiliza noțiunea de *eroare absolută maximă a unei aproximante* și în cazul unei singure aproximante.

Eroarea absolută este mai mică sau egală cu numărul ce se obține prin înlocuirea în x a cifrei ordinului de aproximare cu 1 și a tuturor celorlalte cifre cu zero pentru orice fel de aproximare la cifra de ordinul respectiv. Urmează că putem considera numărul astfel obținut ca eroare absolută maximă a aproximantelor prin lipsă sau exces ale numărului x pentru cifra de ordinul fixat.

III.4.3. Eroare relativă, eroare relativă maximă

Cunoașterea numai a erorii absolute a unei aproximante pentru un număr real este de foarte multe ori insuficientă pentru a caracteriza gradul de precizie într-un calcul sau într-o măsurătoare. Așa, de exemplu, dacă afirmăm că eroarea unei anumite lungimi măsurate este de 1 mm, fără a se cunoaște și mărimea lungimii măsurate, nu se poate spune dacă măsurarea este bine făcută sau nu. Dacă eroarea de 1 mm se referă la măsurarea unei lungimi de 50 m se poate spune că rezultatul este extraordinar de bun, dar dacă s-ar măsura diametrul interior al unui rulment și în loc de 10 mm am aprecia prin măsurătoare că are 9 mm, este evident că nimeni nu poate aprecia rezultatul ca fiind bun.

De aceea, calitatea unui rezultat poate fi cu mult mai bine apreciată, dacă se cunoaște așa-numita eroare relativă în definirea căreia intră și mărimea însăși.

III.4.3.1. *Definiție.* **Eroarea relativă a unei aproximante x^* pentru un număr real x este egală cu raportul dintre eroarea absolută a aproximantei x^* și valoarea absolută a numărului x.**

Numărul real fiind x, aproximanta sa x^* și notînd eroarea relativă cu e vom avea, potrivit definiției

$$e = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{a}{|x|}.$$

Exemplu :

Fie $x = 1{,}415$ și $x^* = 1{,}42$ avem $\varepsilon = 0{,}005$, iar $e = \frac{|0{,}005|}{|1{,}415|}$, care este aproximativ 0,004.

Deseori eroarea relativă se exprimă fie la sută (în procente), fie la mie. În exemplul dat, eroarea relativă este de $4^0/_{00}$ (4 la mie).

Ca și pentru eroarea absolută maximă și aici considerente de ordin practic ne determină să introducem noțiunea de eroare relativă maximă.

Dăm astfel următoarea

III.4.3.2. *Definiție.* **Numim eroare relativă maximă a aproximantelor x_i^* pentru numărul real x, pe care o notăm cu E, raportul dintre eroarea absolută maximă și valoarea absolută a numărului.**

Pentru un singur număr x și pentru o singură aproximantă a sa x^* eroarea relativă maximă este chiar eroarea relativă a acelei aproximante, deoarece eroarea absolută maximă, în acest caz, este chiar eroarea absolută a aproximantei. De aceea vom utiliza noțiunea de *eroare relativă maximă a unei aproximante* și în cazul unei singure aproximante.

Potrivit definiției date și a notațiilor adoptate avem :

$$E = \frac{A}{|x|}.$$

III.5. Erori datorate modului de reprezentare

În operațiile aritmetice cu numere reale sîntem adeseori conduși să operăm cu aproximante care au un număr finit de n zecimale, în general mai mic decît numărul de zecimale η, al numerelor reale date ($\eta \geqslant n$), fără ca rezultatul obținut să devină inutilizabil.

Deoarece în locul numerelor reale date operăm cu aproximantele lor care au altă reprezentare (reprezentare finită, cu un număr dat de n zecimale sau cifre), eroarea introdusă se numește *eroare de reprezentare.*

Eroarea de reprezentare este prezentă de la început în calcule și străbate tot complexul de operații pătrunzînd în rezultat. De aceea vom spune că eroarea de reprezentare este o eroare transmisibilă.

III.6. Inegalitățile fundamentale în aproximarea numerelor reale

Fie numărul real pozitiv x dat prin

$$x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k} \ldots$$

unde $a_n \neq 0$ (a_n este prima cifră diferită de zero în scrierea numărului x de la stînga la dreapta)

și

$$x^* = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k}$$

o aproximantă a lui x. Putem scrie această aproximantă folosind forma de scriere cu ajutorul puterilor lui 10.

$$x^* = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \ldots + \frac{a_{-k}}{10^k}.$$

Nu este greu de remarcat că atît x cît și x^* admit încadrarea

$$10^n \leqslant x < 10^{n+1} \text{ și } 10^n \leqslant x^* \leqslant 10^{n+1}.$$

Pentru demonstrație vom considera mai întîi o aproximantă $\bar{x}$ prin adaos a lui x în care partea zecimală se substituie cu 1 obținînd $\bar{x} - 1 \leqslant x \leqslant \bar{x}$.

Ținînd seama că pentru cifrele de la partea stîngă a aproximantei avem relațiile

$$1 \leqslant a_n \leqslant 9$$

$$0 \leqslant a_k \leqslant 9 \qquad \text{pentru } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$1 \leqslant a_0 + 1 \leqslant 10$$

Înmulțind prima inegalitate cu 10^n și a doua cu 10^k, apoi sumînd avem

$$10^n + 1 \leqslant \bar{x} \leqslant 9(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10) + 10.$$

Efectuînd suma din partea dreaptă a celei de a doua inegalități rezultă

$$10^n + 1 \leqslant \bar{x} \leqslant 10^{n+1}$$

care se poate scrie

$$10^n \leqslant \bar{x} - 1 \text{ și } \bar{x} \leqslant 10^{n+1},$$

unde folosind și $\bar{x} - 1 \leqslant x$, $x \leqslant \bar{x}$ scrise anterior avem

$$10^n \leqslant \bar{x} - 1 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant 10^{n+1}$$

care numai pentru numărul x devine

$$10^n \leqslant x < 10^{n+1}.$$

Inegalitățile pentru aproximanta x^* se pot scrie direct, dacă avem în vedere că demonstrația pentru $\bar{x}$ poate avea loc indiferent de ordinul la care se face rotunjirea prin adaos.

Deci

$$10^n \leqslant x^* \leqslant 10^{n+1}.$$

Dubla relaţie obţinută pentru x formează aşa-numita *prima dublă inegalitate* fundamentală în aproximarea numerelor reale iar exponentul n care apare în puterile lui 10 este numit caracteristica numărului real x.

De asemenea numărul x şi aproximanta lui x^*, dată anterior, satisfac şi relaţiile:

$$a_n 10^n \leqslant x < (a_n + 1)10^n, \quad a_n \cdot 10^n \leqslant x^* \leqslant (a_n + 1)10^n.$$

Pentru a demonstra aceste inegalităţi vom considera aproximanta $\bar{x}$ de mai înainte formată din două părţi. Astfel:

$$\bar{x} = a_n \cdot 10^n + N.$$

Ţinînd seama că pentru orice cifră din N avem

$$0 \leqslant a_k \leqslant 9 \qquad \text{pentru } k = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$1 \leqslant a_0 + 1 \leqslant 10.$$

Înmulţind prima relaţie cu 10^k şi sumînd avem

$$1 \leqslant N \leqslant 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10) + 10.$$

Făcînd suma în partea dreaptă a inegalităţii obţinem

$$1 \leqslant N \leqslant 10^n.$$

Adunînd acum la fiecare parte $a_n 10^n$ găsim

$$a_n 10^n + 1 \leqslant \bar{x} \leqslant (a_n + 1)10^n.$$

Această dublă inegalitate poate fi scrisă şi astfel:

$$a_n 10^n \leqslant \bar{x} - 1 \text{ şi } \bar{x} \leqslant (a_n + 1)10^n.$$

Ţinînd seama că

$$\bar{x} - 1 \leqslant x \text{ şi } x \leqslant \bar{x}$$

care au fost scrise mai înainte avem

$$a_n 10^n \leqslant \bar{x} - 1 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant (a_n + 1)10^n.$$

Reţinînd numai relaţiile privitoare la numărul real x se găseşte

$$a_n 10^n \leqslant x < (a_n + 1)10^n.$$

Pentru aproximanta x^* putem scrie relaţia direct, deoarece demonstraţia pentru $\bar{x}$ este aceeaşi, oricare ar fi ordinul la care se face rotunjirea prin adaos. Aşa încît

$$a_n 10^n \leqslant x^* \leqslant (a_n + 1)10^n.$$

Această a doua dublă relație scrisă pentru x este numită *a doua dublă inegalitate* fundamentală în aproximarea numerelor reale.

De subliniat este faptul că cele două duble inegalități fundamentale în aproximarea numerelor se referă de fapt numai la numărul real x, dar am introdus alături de numărul real x și o aproximantă a lui, x^* care poate avea totdeauna o scriere zecimală finită și în consecință poate substitui în calcule pe x.

Precizăm că toate cele arătate în acest paragraf au fost considerate pentru cazul în care numărul real x este pozitiv. Pentru cazul în care numărul real x ar fi negativ se păstrează toate afirmațiile, schimbînd doar inegalitățile în inegalități de sens contrar.

III.7. Aproximante cu eroarea absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{10^k}$

Fie numărul real x iar x_1^* și x_2^* două aproximante ale lui x, prima prin lipsă și a doua prin exces.

III.7.1. *Definiție.* **Spunem că x_1^* și x_2^* sînt aproximante prin lipsă și respectiv prin exces ale lui x cu eroarea absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{10^k}$ dacă verifică următoarele 3 proprietăți :**

1° Fiecare au cîte k cifre la partea zecimală, adică $x_1^* = \frac{x'}{10^k}$ și $x_2^* = \frac{x''}{10^k}$ unde x' și x'' sînt întregi.

2° Numărul x se află cuprins între valorile aproximantelor respective, adică $x_1^* \leqslant x \leqslant x_2^*$.

3° Diferența lor este $\frac{1}{10^k}$, adică $x_2^* - x_1^* = \frac{1}{10^k}$.

Eroarea absolută este mai mică sau egală cu $\frac{1}{10^k}$ pentru că din definiție avem

$$x_1^* \leqslant x \leqslant x_2^*$$

iar aceasta duce la

$$x - x_1^* \leqslant x_2^* - x_1^* \text{ și } x_2^* - x \leqslant x_2^* - x_1^*.$$

Avînd în vedere proprietatea 3° rezultă

$$x - x_1^* \leqslant \frac{1}{10^k} \text{ și } x_2^* - x \leqslant \frac{1}{10^k}.$$

În proprietatea 1° făcînd scăderea între membrii egalităţilor şi ţinînd seama de proprietatea 3° găsim că

$$x'' = x' + 1$$

deci x' şi x'' sînt doi întregi consecutivi. Acest rezultat corelat cu proprietatea 2° arată că avem

$$\frac{x'}{10^k} \leqslant x \leqslant \frac{x'+1}{10^k}.$$

Această relaţie duce la stabilirea modului de aproximare a unui număr real oarecare x.

III.7.2. *Regulă.* Aproximanta prin lipsă cu mai puţin de $\frac{1}{10^k}$ se obţine reţinînd din numărul x cifrele de la partea întreagă şi primele k cifre ale părţii zecimale, iar aproximanta prin adaos se obţine adăugînd o unitate de ordinul $\frac{1}{10^k}$ la aproximanta prin lipsă.

Proprietăţile 1° şi 3° se verifică imediat. Mai trebuie arătat că $x \leqslant x_2^*$ pentru că $x \geqslant x_1^*$ este de asemenea imediată.

Într-adevăr

$$x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k} + 0{,}0 \ldots 0 a_{-(k+1)} a_{-(k+2)} \ldots = x_1^* +$$

$$+ 0{,}0 \ldots 0 a_{-(k+1)} a_{-(k+2)} \ldots \leqslant x_1^* + \underbrace{0{,}0 \ldots 0}_{\text{de } k \text{ ori zero}}(9) = x_1^* + \underbrace{0{,}0 \ldots 0}_{\text{de } k-1 \text{ ori zero}}1 = x_1^* +$$

$$+ \frac{1}{10^k} = x_2^*.$$

Deci

$$x \leqslant x_2^*.$$

La aproximarea prin rotunjire dată la III.3.1 şi III.3.2, aproximantele sînt cu o eroare absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $k < 0$ pentru cifre de la partea întreagă şi $k > 0$ pentru cifre de la partea fracţionară) deoarece avem în vedere cifra care urmează la dreapta cifrei fixate pentru aproximare (dacă este 0, 1, 2, 3, 4 sau dacă este 5, 6, 7, 8, 9).

Cu regula completării se obţin aproximante cu eroare absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$.

De asemenea aproximarea canonică sau prin trunchiere precum şi aproximarea prin rotunjire efectuate la maşinile de calcul, dau erori mai mici sau egale cu $\frac{1}{10^k}$ şi respectiv $\frac{1}{2 \cdot 10^k}$.

Exemple:

1. Să se aproximeze numărul π cu o aproximantă prin lipsă și o aproximantă prin exces avînd o eroare absolută cel mult egală cu $\frac{1}{10^k}$ unde $k = 1, 2, 3$, iar $\pi = 3{,}14159265\ldots$

$k = 1$ prin lipsă $\pi = 3{,}1$
prin exces $\pi = 3{,}2$

$k = 2$ prin lipsă $\pi = 3{,}14$
prin exces $\pi = 3{,}15$

$k = 3$ prin lipsă $\pi = 3{,}141$
prin exces $\pi = 3{,}142$

2. Să se aproximeze numărul π cu o eroare absolută cel mult egală cu $\frac{1}{2\cdot 10^k}$, unde $k = 1, 2, 3, 4$.

$$k = 1 \Rightarrow \pi = 3{,}1\ ;\ k = 2 \Rightarrow \pi = 3{,}14\ ;\ k = 3 \Rightarrow \pi = 3{,}142\ ;$$

$$k = 4 \Rightarrow \pi = 3{,}1416.$$

III.8. Cifre sigure și cifre îndoielnice pentru o aproximantă dată

Fie numărul real dat de

$$x = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_{n-k}10^{n-k} + a_{n-k-1}10^{n-k-1} + \ldots$$

și x^* o aproximantă a lui, conținînd primele k cifre.

$$x^* = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_{n-k+1}10^{n-k+1}.$$

Eroarea absolută a acestei aproximante este dată de

$$a \leqslant (a_{n-k} + 1)10^{n-k}.$$

Deoarece $a_{n-k} \leqslant 9$ avem

$$A = 10^{n-k+1}.$$

Pentru cazurile în care dorim ca aproximarea să fie mai bună se poate aplica regula de completare pentru determinarea unei aproximante ce are o eroare mai mică sau egală cu $\frac{1}{2\cdot 10^k}$ pentru numere pozitive.

Din

$$a \leqslant (a_{n-k} + 1)10^{n-k}$$

deducem următoarele două cazuri aplicînd regula completării:

1°. pentru $a_{n-k} \geqslant 5$, majorăm pe a_{n-k+1} cu o unitate și obținem o aproximantă prin exces a cărei eroare absolută este dată de

$$a = x^* - x = 10^{n-k+1} - (a_{n-k}10^{n-k} + \ldots)$$

unde punînd în locul cifrei a_{n-k} valoarea minimă pe care o poate lua, 5 și neglijînd celelalte cifre ce urmează după a_{n-k} diferența crește devenind

$$A = x^* - x \leqslant 10^{n-k+1} - 5 \cdot 10^{n-k} = \frac{1}{2} 10^{n-k+1};$$

2°. pentru $a_{n-k} < 5$ considerăm în relația

$$a \leqslant (a_{n-k} + 1)10^{n-k}$$

cifra $a_{n-k} = 4$, valoarea maximă pe care o poate lua și avem o aproximantă prin lipsă astfel încît eroarea absolută

$$a = x - x^* \leqslant 5 \cdot 10^{n-k}.$$

Înmulțind și împărțind cu 2 avem

$$A = \frac{1}{2} 10^{n-k+1}.$$

În acord cu aceste ultime două cazuri putem da următoarea

III.8.1. *Definiție.* **Spunem că x^* este o aproximantă a numărului real x $x>0$, cu k cifre sigure dacă eroarea absolută maximă este mai mică sau egală cu 10^{n-k+1} fără aplicarea regulii de completare și mai mică sau egală cu $\frac{1}{2} 10^{n-k+1}$ cu aplicarea regulii de completare, unde n este caracteristica numărului x.**

Cifrele care urmează cifrelor sigure se numesc cifre nesigure sau cifre îndoielnice.

De aceea dintr-o aproximantă nu vom reține decît cifrele sigure. În calcule însă este bine să se rețină două sau chiar trei cifre în plus peste numărul de cifre sigure și numai la rezultat luăm aproximanta acestuia cu numărul de cifre sigure precizat de eroarea absolută maximă.

Exemple:

1. Să se determine numărul de cifre sigure ale aproximantei numărului π a cărei eroare absolută maximă este de 0,00001.

Avem din problemă:

$$A = \frac{1}{10^5},$$

iar din definiție,

$$A = 10^{n-k+1}$$

fără aplicarea regulii de completare.

Deoarece numărul π are o singură cifră la partea întreagă, urmează că $n = 0$.

Deci,

$$A = \frac{1}{10^5} = 10^{-k+1}.$$

Adică,

$$10^5 \cdot 10^{-k+1} = 1 = 10^0,$$

încît

$$10^{-k+6} = 10^0, \; -k + 6 = 0, \; k = 6.$$

Rezultă că aproximanta respectivă a fost luată cu 6 cifre sigure, deci este 3,14159.

2. Să se determine numărul de cifre îndoielnice ale aproximantei numărului $\sqrt{3} \approx 1{,}7320508076425$ a cărei eroare absolută maximă este de $\frac{1}{10^{10}}$.

Avem

$$A = \frac{1}{10^{10}} = 10^{n-k+1}$$

fără aplicarea regulii de completare.

Deoarece numărul $\sqrt{3}$ are o singură cifră la partea întreagă, înseamnă că $n = 0$.

Deci

$$A = \frac{1}{10^{10}} = 10^{-k+1}; \; 10^{10} \cdot 10^{-k+1} = 1 = 10^0$$

încît

$$-k + 11 = 0, \; k = 11.$$

Aproximanta lui $\sqrt{3}$ avînd 11 cifre sigure, urmează că ultimele 3 cifre sînt îndoielnice.

III.9. Determinarea erorilor relative maxime ale unei aproximante pe baza cifrelor sigure ale acesteia

Să considerăm numărul real x și x^* o aproximantă a sa cu k cifre sigure. Fie a_n prima cifră a numărului x și a aproximantei x^*, $(a_n \neq 0)$.

Erorile absolute maxime fără regula de completare și cu regula de completare sînt date respectiv de

$$A = 10^{n-k+1} \text{ și } A = \frac{1}{2} 10^{n-k+1}.$$

Erorile relative maxime în aceste cazuri vor fi deduse din

$$E = \frac{A}{|x|}$$

unde vom avea în vedere că $x \geqslant a_n 10^n$, care fără regula de completare conduce la

$$E \leqslant \frac{10^{n-k+1}}{a_n 10^n} = \frac{1}{a_n 10^{k-1}} \text{ deci } E \leqslant \frac{1}{a_n 10^{k-1}},$$

iar cu regula de completare conduce la

$$E \leqslant \frac{10^{n-k+1}}{2a_n 10^n} = \frac{1}{2a_n 10^{k-1}} \text{ deci } E \leqslant \frac{1}{2a_n 10^{k-1}}.$$

Din cele demonstrate rezultă :

Teoremă. **Fiind dat un număr x şi o aproximantă a sa x^* cu k cifre sigure, eroarea relativă maximă a lui x^* este mai mică sau egală cu $\frac{1}{a_n 10^{k-1}}$ fără regula de completare şi mai mică sau egală cu $\frac{1}{2a_n 10^{k-1}}$ cu regula de completare, unde a_n este prima cifră nenulă de la stînga lui x^*.**

Este uşor de remarcat că erorile relative maxime exprimate în procente sau nu, pot fi antecalculate deoarece depind numai de prima cifră a numărului şi de numărul de cifre sigure, astfel încît se poate întocmi un tabel de erori relative maxime. Astfel de tabele sînt întocmite şi se află în multe formulare matematice de unde ele pot fi luate pentru a fi folosite.

Dăm şi noi un astfel de tabel în care sînt trecute erorile relative maxime în procente.

Tabelul III.1

Erorile relative maxime cînd se cunoaşte a_n şi k cu regula de completare

Prima cifră semnificativă a_n	Numărul de cifre sigure k							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	50	5,0	0,50	0,050	0,0050	0,00050	0,000050	0,0000050
2	25	2,5	0,25	0,025	0,0025	0,00025	0,000025	0,0000025
3	17	1,7	0,17	0,017	0,0017	0,00017	0,000017	0,0000017
4	12	1,2	0,12	0,012	0,0012	0,00012	0,000012	0,0000012
5	10	1,0	0,10	0,010	0,0010	0,00010	0,000010	0,0000010
6	8,3	0,83	0,083	0,0083	0,00083	0,000083	0,0000083	0,00000083
7	7,1	0,71	0,071	0,0071	0,00071	0,000071	0,0000071	0,00000071
8	6,3	0,63	0,063	0,0063	0,00063	0,000063	0,0000063	0,00000063
9	5,6	0,56	0,056	0,0056	0,00056	0,000056	0,0000056	0,00000056

Exemple :

Fie numărul

$x = 27,24536$

care are primele 5 cifre sigure. Să se determine eroarea relativă maximă prin calcul şi apoi confruntînd rezultatul cu tabelul de valori.

Din calcul ştim că fără regula de completare avem

$$E = \frac{1}{a_n 10^{k-1}}$$

unde, pentru cazul nostru, $a_n = 2$ şi $k = 5$. Deci,

$$E = \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0,00005.$$

Cu regula de completare, avem

$$E = \frac{1}{2a_n 10^{k-1}}$$

care, cu datele problemei, dă

$$E = \frac{1}{4 \cdot 10^4} = 0{,}000025,$$

adică

$$E = 0{,}0025\,\%,$$

căutînd în tabel pe linia 2, coloana 5 găsim același rezultat.

III.10. Determinarea numărului de cifre sigure ale unei aproximante cînd se cunoaște eroarea relativă maximă a ei

Să considerăm prin ipoteză, eroarea relativă a aproximantei x^* a lui x cu eroare relativă maximă, egală cu :

$$E = \frac{1}{s \cdot 10^p}, \text{ unde } 1 \leqslant s \leqslant 9.$$

Folosind rezultatele din paragraful precedent deducem că numărul k de cifre sigure ale aproximantei x^* este cel mai mare număr natural k pentru care este verificată inegalitatea :

$$\frac{1}{s \cdot 10^p} \leqslant \frac{1}{a_n 10^{k-1}},$$

adică,

$$s \cdot 10^p \geqslant a_n \cdot 10^{k-1},$$

ceea ce este echivalent cu

$$10^{k-p-1} \leqslant \frac{s}{a_n}.$$

a) Dacă $s \geqslant a_n$,

rezultă

$$10^{k-p-1} \leqslant 1 \leqslant \frac{s}{a_n}.$$

Deci trebuie să avem,

$$k - p - 1 \leqslant 0,$$

de unde deducem $k \leqslant p + 1$.

b) Dacă $s < a_n$,

rezultă

$$10^{k-p-1} \leqslant \frac{1}{10} < \frac{s}{a_n},$$

de unde

$$k - p - 1 \leqslant -1 \text{ sau } k \leqslant p.$$

Avem deci :

Teoremă. **Dacă eroarea relativă maximă a aproximantelor unui număr este** $\frac{1}{s \cdot 10^p}$ (s **și** p **date) cu** $1 \leqslant s \leqslant 9$ **și** $p \in \mathbf{N}$**, aproximantele au** $p + 1$ **cifre sigure cînd** $s \geqslant a_n$ **și** p **cifre sigure cînd** $s < a_n$.

Întocmai ca și în cazul precedent se pot întocmi tabele pentru determinarea cifrelor sigure pentru erori relative maxime date.

Dăm în continuare tabelul cu cifrele sigure pentru cîteva valori ale erorii relative maxime pentru

$$a_n = 1, 2, 3, \ldots, 9.$$

Tabelul III.2

a_n	E			
	5%	1%	0,5%	0,1%
1	2	3	3	4
2	2	2	3	3
3	1	2	2	3
4	1	2	2	3
5	1	2	2	3
6	1	2	2	3
7	1	2	2	3
8	1	2	2	3
9	1	2	2	3

Exemple :

1. Fie $x^* = 24{,}38256$ o aproximantă a unui număr x care are eroarea relativă $E = \frac{1}{50\,000}$. Să se afle numărul de cifre sigure.

$$E = \frac{1}{5 \cdot 10^4}$$

deci $s = 5$ și $p = 4$. Avînd $a_n = 2 < s$ rezultă $k = p + 1 = 5$, încît x^* are primele 5 cifre din stînga sigure.

2. Fie aproximantele lui π date cu o eroare relativă maximă de 0,5%. Să se afle numărul de cifre sigure ale aproximantelor.

Folosind tabelul III.2 se găsește la intersecția liniei a treia cu coloana 0,5% numărul 2, deci aproximanta are două cifre sigure.

III.11. Efectuarea sumelor și diferențelor cu aproximante

Aproximantele fiind numere raționale operațiile de adunare și scădere cu acestea nu se deosebesc cu nimic de aceleași operații efectuate cu numerele raționale. Ceea ce interesează în mod deosebit este eroarea transmisă la rezultat.

Fie numerele reale x_1 și x_2 și aproximantele lor x_1^* și x_2^* cu erorile absolute a_1 și a_2. Vom considera ca aproximantă a sumei, suma celor două aproximante și deci eroarea absolută a sumei va fi dată de

$$|(x_1^* + x_2^*) - (x_1 + x_2)| = a.$$

Această relație se mai poate scrie

$$|(x_1^* - x_1) + (x_2^* - x_2)| \leqslant |x_1^* - x_1| + |x_2^* - x_2| = a_1 + a_2,$$

adică,

$$a \leqslant a_1 + a_2.$$

Este ușor de văzut că putem generaliza această relație pentru o sumă cu un număr finit de termeni, fapt ce ne permite să enunțăm rezultatul prin următoarea teoremă.

Teoremă. **Eroarea absolută a aproximantei unei sume finite de termeni, numere reale, este mai mică sau cel mult egală cu suma erorilor absolute ale aproximantelor termenilor.**

Considerăm, de asemenea, numerele reale x_1 și x_2 și aproximantele lor x_1^* și x_2^* erorile absolute maxime fiind A_1 și A_2 iar ca aproximantă a sumei, suma celor două aproximante. Ne întrebăm care este relația între eroarea absolută a sumei și erorile absolute ale aproximantelor termenilor sumei?

Dacă $x_1^* + x_2^* = x^*$ este o aproximantă a sumei $x_1 + x_2 = x$, eroarea absolută a sumei aproximantelor este dată de

$$|x^* - x| = |(x_1^* + x_2^*) - (x_1 + x_2)| = |(x_1^* - x_1) + (x_2^* - x_2)| \leqslant |x_1^* - x_1| + |x_2^* - x_2|,$$

adică

$$a \leqslant a_1 + a_2$$

și avînd în vedere definiția dată pentru eroarea absolută maximă la III.4.2 avem $a_1 \leqslant A_1$ și $a_2 \leqslant A_2$, deci

$$a_1 + a_2 \leqslant A_1 + A_2,$$

adică

$$a \leqslant A_1 + A_2.$$

Deoarece această relaţie se poate extinde la o sumă cu un număr finit de termeni, putem da următoarea teoremă :

Teoremă. **Eroarea absolută a sumei este mai mică sau cel mult egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor sumei.**

De asemenea, putem considera ca eroare maximă a sumei însăşi suma erorilor absolute maxime, deoarece notînd

$$A_1 + A_2 = A$$

avem

$$a \leqslant A.$$

Cum şi această relaţie se poate extinde la o sumă cu un număr finit de termeni, şi utilizînd în acest caz noţiunea de *eroare absolută maximă a sumei*, avem teorema :

Teoremă. **Eroarea absolută maximă a unei sume este egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor sumei.**

În ceea ce priveşte eroarea relativă maximă a lui x^* care reprezintă suma celor două aproximante x_1^* şi x_2^* ale numerelor reale x_1 şi x_2 considerate, ea este dată de

$$E = \frac{A}{|x|} \text{ sau } |x|E = A.$$

Însă

$$A = A_1 + A_2$$

şi

$$A_1 = |x_1|E_1, \; A_2 = |x_2|E_2,$$

deci

$$|x|E = |x_1|E_1 + |x_2|E_2,$$

sau

$$E = \frac{|x_1|}{|x|}E_1 + \frac{|x_2|}{|x|}E_2,$$

adică

$$E = \frac{|x_1|E_1 + |x_2|E_2}{|x_1 + x_2|}, \text{ deoarece } x = x_1 + x_2.$$

Această relaţie poate fi generalizată pentru un număr n finit de termeni şi utilizînd semnul $\sum$ pentru sumă avem

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|}.$$

Dacă în exprimarea anterioară a lui E dată pentru două numere presupunem că avem:

$$E_1 \leqslant E_2,$$

atunci

$$\frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|} E_1 \leqslant E \leqslant \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|} E_2.$$

Şi această relaţie poate fi generalizată pentru un număr n finit de termeni obţinîndu-se

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|} \cdot \min(E_i) \leqslant E \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|} \max(E_i),$$

unde am notat cu $\max(E_i)$ cea mai mare dintre erorile relative maxime ale termenilor, iar cu $\min(E_i)$ cea mai mică dintre erorile relative maxime ale termenilor sumei.

Ultimele două relaţii dau posibilitatea evidenţierii a două importante observaţii cu privire la aprecierea erorii relative a aproximantei unei sume.

Observaţia 1. Eroarea relativă maximă a unei sume de aproximante de acelaşi semn este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare dintre erorile relative maxime ale termenilor sumei.

Într-adevăr, pentru toţi x_i de acelaşi semn avem

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$$

şi deci ultima relaţie devine

$$\min(E_i) \leqslant E \leqslant \max(E_i).$$

Observaţia 2. Eroarea relativă maximă a unei sume algebrice de aproximante, poate depăşi, în general, pe cea mai mare dintre erorile relative maxime ale termenilor sumei.

Într-adevăr, pentru cazul că nu toţi x_i au acelaşi semn avem

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| > \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$$

şi deci

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|} > 1$$

încît există în general posibilitatea ca E să depăşească pe $\max(E_i)$.

Exemple:

1. Să se calculeze cu şase cifre sigure suma

$$x = 234{,}172 + 26{,}5736 + 8{,}75735.$$

Pentru fiecare număr, cele şase cifre sînt sigure deci suma poate să aibă cel mult şase cifre sigure aşa încît reţinem de la cel mai mare număr toate cifrele, iar la celelalte numere aplicăm regula de rotunjire (regula completării) astfel încît fiecare număr să aibă după virgulă atîtea zecimale, cît numărul care are cele mai puţine zecimale, astfel,

$$\begin{array}{r} 234{,}172 \\ 26{,}574 \\ 8{,}757 \\ \hline 269{,}503 \end{array}$$

2. Să se calculeze eroarea absolută maximă a sumei

$$x = 4\,597{,}273 + 872{,}9736 + 0{,}47983$$

unde erorile absolute sînt indicate pentru fiecare număr, de ordinul ultimei sale cifre.

Avem deci erorile absolute ale numerelor date de

$$\frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^4},\ \frac{1}{10^5},$$

aşa încît eroarea absolută maximă este

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} = \frac{100 + 10 + 1}{10^5} < \frac{200}{10^5} = \frac{2}{10^3}.$$

Aplicînd regula completării, avem,

$$\begin{array}{r} 4\,597{,}273 \\ 872{,}974 \\ 0{,}480 \\ \hline 5\,470{,}727 \end{array}$$

şi eroarea absolută este mai mică decît $\frac{2}{10^3}$.

De remarcat că şi în cazul aproximării prin trunchiere (aproximarea canonică) eroarea absolută a sumei rămîne mai mică decît eroarea absolută maximă.

La aceeaşi aproximare a sumei ajungem şi dacă considerăm la termenii sumei o zecimală peste ordinul cifrei la care se face aproximarea, adică în loc ca ultima cifră să fie cifra care dă eroarea absolută $\frac{1}{10^n}$, luăm ca ultimă cifră zecimală pe aceea care dă eroarea $\frac{1}{10^{n+1}}$, iar după efectuarea sumei aplicăm rezultatului metoda completării.

Deoarece eroarea absolută maximă a unei sume aritmetice este egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor, erorile foarte mici ale unor termeni pot fi neglijate. De aceea nu are sens să păstrăm prea multe cifre la termenii cu o precizie mai mare.

Să analizăm acum cazul diferenței a două numere reale. Fie x_1^* și x_2^* aproximantele numerelor reale x_1 și x_2, iar a_1 și a_2 erorile absolute ale aproximantelor. Deoarece diferența $x = x_1 - x_2$ și o aproximantă a sa $x^* = x_1^* - x_2^*$ sînt sume algebrice, unele rezultate obținute pentru suma algebrică sînt aplicabile și în cazul diferenței. Utilizînd noțiunea de *eroare absolută maximă a unei diferențe* avem următoarea teoremă pe care o enunțăm fără a o demonstra :

Teoremă. **Eroarea absolută maximă a unei diferențe este egală cu suma erorilor absolute maxime ale termenilor diferenței.**

Tot din rezultatele obținute la suma algebrică vom remarca distingerea a două cazuri care rezultă din *Observația 2*, făcută în acest paragraf :

a) cînd descăzutul și scăzătorul, avînd același semn, diferă mult ca mărime a valorilor absolute, atunci eroarea relativă maximă a diferenței se determină întocmai ca pentru sumă ;

b) cînd descăzutul și scăzătorul, avînd același semn, au valorile absolute foarte apropiate, erori mici ale termenilor pot atrage după ele o eroare relativă maximă foarte mare a diferenței.

Exemple :

1. Să se calculeze diferența

$$x = x_1 - x_2,$$

unde

$$x_1 = 18{,}2379 \text{ și } x_2 = 18{,}2374$$

sînt numere cu valori apropiate.

Considerînd aproximantele obținute prin rotunjire la cifra miimilor avem

$$x_1^* = 18{,}238, \quad x_2^* = 18{,}237$$

cu erorile absolute

$$a_1 = 0{,}0001 \text{ și } a_2 = 0{,}0004.$$

Rezultă erorile relative ale termenilor

$$e_1 = \frac{0{,}0001}{18{,}2379} = 0{,}000005 \, ; \quad e_2 = \frac{0{,}0004}{18{,}2374} = 0{,}00002.$$

Dar

$$x = x_1 - x_2 = 0{,}0005 \text{ și } x^* = x_1^* - x_2^* = 0{,}001.$$

Deoarece

$$a = | x^* - x | \text{ și } e = \frac{a}{|x|},$$

avem

$$a = 0{,}0005$$

și eroarea relativă a diferenței

$$e = \frac{0{,}0005}{0{,}0005} = 1$$

care arată că eroarea relativă a diferenței este foarte mare in comparație cu erorile relative ale termenilor.

2. Să se calculeze diferența

$$x = x_1 - x_2,$$

unde

$$x_1 = 23,4759, \ x_2 = 3,4753$$

sînt numere cu valori absolute ce diferă mult între ele.

Considerînd aproximantele obținute prin rotunjire la cifra miimilor avem

$$x_1^* = 23,476 \text{ și } x_2^* = 3,475$$

cu erorile absolute

$$a_1 = 0,0001 \text{ și } a_2 = 0,0003,$$

rezultă

$$e_1 = \frac{0,0001}{23,4759} = 0,000004 \text{ și } e_2 = \frac{0,0003}{3,4753} = 0,00008,$$

dar

$$x = x_1 - x_2 = 20,0006 \text{ și } x^* = x_1^* - x_2^* = 20,001$$

deci

$$a = 0,0004,$$

de unde

$$e = \frac{0,0004}{20,0006} = 0,00002$$

de unde se vede că eroarea relativă este foarte apropiată de erorile relative ale termenilor.

Presupunînd, deci, că cei doi termeni ai diferenței, avînd același semn, au diferența mare între module, ținîndu-se seama de rezultatele obținute la sumă dăm următoarea regulă fără demonstrație :

III.11.1. — *Regulă.* Pentru calcularea diferenței între două aproximante, care aproximează două numere cu erori absolute maxime $\frac{1}{10^n}$ și respectiv $\frac{1}{10^{n+m}}$ $(n, m \in \mathbf{N})$, se rețin cîte n zecimale de la fiecare aproximantă (prin lipsă sau adaos) și se face diferența. Eroarea absolută maximă a diferenței este de $\frac{1}{10^n}$.

Exemple :

1. Să se calculeze diferența

$$0,035746 - 0,02379$$

știind că erorile absolute maxime sînt de $\frac{1}{10^4}$ și respectiv $\frac{1}{10^3}$. Reținînd cîte trei zecimale la ambele numere avem aproximantele cu care efectuăm diferența. Eroarea absolută maximă a diferenței este $\frac{1}{10^3}$

$$0,036 - 0,024 = 0,012.$$

2. Să se calculeze diferența

$$543{,}245 - 0{,}214312$$

știind că erorile absolute maxime sînt date de $\frac{1}{10^3}$ și respectiv $\frac{1}{10^4}$. Reținem deci cîte trei zecimale la fiecare și cu aproximantele respective efectuăm diferența. Eroarea absolută maximă a diferenței este $\frac{1}{10^3}$

$$543{,}245 - 0{,}214 = 543{,}031.$$

3. Să se calculeze eroarea relativă a diferenței

$$573{,}23746 - 573{,}23742$$

știind că erorile absolute sînt, la ambele numere, mai mici decît $0{,}5 \cdot \frac{1}{10^5}$.

Deoarece diferența lor este foarte mică, 0,00004, iar eroarea absolută a diferenței fiind mai mică decît $0{,}5 \frac{1}{10^5}$, nu putem estima eroarea relativă a rezultatului (observația 2 din acest paragraf).

III.12. Efectuarea produselor și cîturilor cu aproximante

Să considerăm numerele reale x_1 și x_2 cu aproximantele x_1^* și x_2^* avînd erorile absolute a_1 și, respectiv, a_2. Fie $x^* = x_1^* \cdot x_2^*$ o aproximantă a lui $x = x_1 \cdot x_2$ cu eroare absolută

$$a = | x_1^* \cdot x_2^* - x_1 \cdot x_2 |$$

avem

$$x_1 = x_1^* \pm a_1 \text{ și } x_2 = x_2^* \pm a_2,$$

deci

$$x_1 \cdot x_2 = x_1^* \cdot x_2^* \pm x_1^* \cdot a_2 \pm x_2^* \cdot a_1 \pm a_1 \cdot a_2.$$

Calculînd $x_1^* \cdot x_2^* - x_1 \cdot x_2$ și trecînd la valori absolute avem $a = | x_1^* \cdot x_2^* - x_1 \cdot x_2 | = | \pm x_1^* \cdot a_2 \pm x_2^* \cdot a_1 \pm a_1 \cdot a_2 |$,

de unde

$$a \leqslant | x_1^* | a_2 + | x_2^* | a_1 + a_1 a_2,$$

care arată că eroarea absolută a produsului de doi factori este mai mică sau cel mult egală cu suma produselor dintre un factor și eroarea absolută a celuilalt mărită cu produsul erorilor absolute ale celor doi factori.

Împărțind relația precedentă cu $| x | = | x_1 | \cdot | x_2 |$ avem

$$\frac{a}{| x |} \leqslant \frac{| x_1^* | \cdot a_2}{| x_1 | \cdot | x_2 |} + \frac{| x_2^* | \cdot a_1}{| x_1 | \cdot | x_2 |} + \frac{a_1 \cdot a_2}{| x_1 | \cdot | x_2 |}.$$

Ținînd seama de faptul că $\frac{|x_1^*|}{|x_1|}$ și $\frac{|x_2^*|}{|x_2|}$ au valorile foarte apropiate de valoarea 1, precum și că produsul $\frac{a_1}{|x_1|} \cdot \frac{a_2}{|x_2|}$ fiind foarte mic, în comparație cu suma lor, poate fi neglijat, se poate scrie între erorile relative maxime relația

$E \approx E_1 + E_2$, unde semnul „$\approx$" înseamnă „aproximativ egal". Utilizînd noțiunea de *eroare relativă maximă a produsului* în cazul produsului cu aproximante avem teorema :

Teoremă. **Eroarea relativă maximă a produsului a două aproximante este aproximativ egală cu suma erorilor relative maxime ale aproximantelor.**

Generalizarea acestui rezultat se poate ușor extinde la orice produs cu un număr finit de factori și în acest caz eroarea relativă maximă a produsului este aproximativ egală cu suma erorilor relative maxime ale factorilor.

În cazul în care erorile relative pentru n factori sînt valori apropiate, eroarea relativă maximă a produsului va fi aproximativ egală cu de n ori cea mai mare dintre erorile relative ale factorilor. Invers, ca să obținem produsul, cu o anumită eroare relativă, a n factori avînd valori apropiate, trebuie să luăm factorii cu erori relative de n ori mai mici decît eroarea relativă a produsului.

Propoziție : Produsul are cu una sau cel mult două cifre sigure mai puțin decît cel mai mic dintre numerele de cifre sigure ale tuturor factorilor și invers pentru ca produsul să aibă n cifre sigure trebuie să luăm toți factorii cu $n + 1$ sau $n + 2$ cifre sigure.

Demonstrație :

Fie, de exemplu, x_1^* și x_2^* două aproximante cu n cifre sigure și se cere să se calculeze numărul de cifre sigure ale produsului lor.

Dacă $x^* = x_1^* \cdot x_2^*$, atunci $E \approx E_1 + E_2$,
adică

$$\frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{2}{10^{n-1}} = \frac{10}{5 \cdot 10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-2}}$$

deci în cel mai nefavorabil caz produsul va avea $n - 2$ cifre sigure.

Exemple :

1. Să se calculeze produsul

$$x = 1{,}2478 \cdot 0{,}9735 \cdot 2{,}8679$$

cu o eroare relativă maximă de $\frac{1}{10^2}$, adică cu două zecimale sigure.

Luînd mai întîi factorii cu toate zecimalele avem :

$$x = 1{,}2478 \times 0{,}9735 \times 2{,}8679 = 3{,}483733631070$$

la care reținem doar primele două zecimale aplicînd rotunjirea, deci,

$$x^* = 3{,}48.$$

Considerînd numai cîte trei zecimale la fiecare număr (adică o zecimală în plus față de precizia cerută pentru produs) avem:

$$x^* = 1,247 \times 0,973 \times 2,867 = 3,478619977,$$

unde, reținînd numai două zecimale aplicînd rotunjirea, avem

$$x^* = 3,48$$

în care se poate vedea că primele două cifre zecimale coincid cu ale rezultatului corect.

Considerînd însă numai două cifre zecimale la fiecare număr avem

$$x = 1,24 \times 0,97 \times 2,86 = 3,440008$$

din care se vede că a doua zecimală este eronată.

2. Să se determine produsul și eroarea relativă maximă a produsului

$$x = 1,4750 \cdot 1,2864$$

știind că factorii au eroarea relativă maximă de $\frac{1}{10^4}$ și $\frac{1}{10^4}$, vom considera

$$x = 1,475 \cdot 1,286 = 1,89685,$$

unde vom reține numai două zecimale după aplicarea rotunjirii deci $x^* = 1,90$ cu eroarea relativă maximă de $\frac{1}{10^2}$.

Să cercetăm acum cazul cîtului de două numere reale.

Fie x_1 și x_2, cele două numere, x_1^* și x_2^* aproximantele lor cu erorile absolute a_1 și a_2. Notăm cu $x^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}$ o aproximantă a lui $x = \frac{x_1}{x_2}$ cu eroarea absolută a.

Avem

$$x - x^* = \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{x_1^* \pm a_1}{x_2^* \pm a_2} - \frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{x_1^* \cdot x_2^* \pm x_2^* \cdot a_1 \mp x_1^* \cdot x_2^* \pm x_1^* a_2}{x_2^*(x_2^* \pm a_2)},$$

adică

$$a = \frac{| \pm x_1^* \cdot a_2 \pm x_2^* \cdot a_1 |}{| x_2^*(x_2^* \pm a_2) |}$$

sau

$$a \leqslant \frac{| x_1^* | \cdot a_2 + | x_2^* | \cdot a_1}{| x_2^* | \cdot | x_2^* \pm a_2 |} = \frac{| x_1^* | \cdot a_2 + | x_2^* | \cdot a_1}{| x_2^* | \cdot | x_2 |}.$$

Împărțind ultima relație cu $\frac{| x_1 |}{| x_2 |}$ avem

$$e \leqslant \frac{| x_2 | \cdot | x_1^* | \cdot a_2}{| x_1 | \cdot | x_2 | \cdot | x_2^* |} + \frac{| x_2 | \cdot | x_2^* | \cdot a_1}{| x_1 | \cdot | x_2 | \cdot | x_2^* |}.$$

Prin simplificare se obține

$$e \leqslant \frac{|x_1^*|}{|x_1|} \cdot \frac{a_2}{|x_2^*|} + \frac{a_1}{|x_1|}.$$

Însă cum

$$\frac{|x_1^*|}{|x_1|} \approx 1 \quad \text{și} \quad \frac{a_2}{|x_2^*|} \approx \frac{a_2}{|x_2|},$$

obținem

$$e \approx \frac{a_2}{|x_2|} + \frac{a_1}{|x_1|},$$

unde considerînd erori relative maximale avem

$$E \approx E_1 + E_2.$$

Avînd în vedere ultima relație obținută se poate afirma că eroarea relativă maximă a cîtului de două aproximante este aproximativ egală cu suma erorilor relative maxime ale aproximantelor.

Propoziție : Rezultatul împărțirii a două aproximante are cu una sau cel mult două cifre sigure mai puțin decît cel mai mic dintre numerele de cifre sigure ale deîmpărțitului și împărțitorului și invers, pentru ca la cît să obținem n cifre sigure trebuie să luăm numerele cu $n + 1$ sau $n + 2$ cifre sigure.

Demonstrație :

Fie aproximantele x_1^* și x_2^* avînd n cifre sigure. Să se calculeze numărul de cifre sigure ale cîtului lor.

Dacă $x^* = \frac{x_1^*}{x_2^*}$, atunci $E \approx E_1 + E_2$,

adică

$$\frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{2}{10^{n-1}} = \frac{10}{5 \cdot 10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-2}},$$

deci în cazul cel mai nefavorabil cîtul va avea $n - 2$ cifre sigure.

Exemple :

1. Să se calculeze cîtul

$$x = \frac{1,26472}{0,25796}$$

cu o eroare relativă maximă de $\frac{1}{10^3}$, adică cu două zecimale sigure.

Efectuînd mai întîi cîtul cu numerele nerotunjite avem

$$x = 1,26472 : 0,25796 = 4,90277...$$

reținînd numai primele două zecimale aplicînd rotunjirea se obține

$$x^* = 4,90.$$

Considerînd aproximantele deîmpărțitului și împărțitorului cu cîte 4 zecimale vom avea

$$x^* = 1,2647 : 0,2580 = 4,900,$$

unde se vede că avem cîtul cu primele zecimale același ca mai înainte.

Efectuînd împărțirea între două aproximante avînd trei zecimale se obține

$$x^* = 1,265 : 0,258 = 4,903,$$

unde primele două zecimale sînt aceleași ca și în cazurile de mai înainte.

Considerînd însă aproximantele numai cu primele două zecimale avem

$$x^* = 1,26 : 0,25 = 5,04,$$

ceea ce arată că rezultatul este eronat.

2. Să se calculeze cîtul

$$x = \frac{2,43569432}{1,264572973}$$

cu o eroare relativă a cîtului de $\frac{1}{10}$. În acest caz aproximantele deîmpărțitului și împărțitorului nu vor avea mai mult de trei zecimale adică o eroare absolută $\frac{1}{10^3}$.

Deci

$$x_1^* = 2,436 \text{ și } x_2^* = 1,265$$

și avem

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{2,436}{1,265} = 1,92.$$

Rezultă: cîtul cu eroarea absolută de $\frac{1}{10}$ este dat de

$$x^* = \frac{x_1^*}{x_2^*} = 1,9.$$

III.13. Ridicarea la putere a aproximantelor

Pentru ridicarea la o putere, de exponent număr natural n, a aproximantei unui număr real x, putem să considerăm că avem produsul cu n factori egali între ei.

De aceea, fie x numărul real și x^* o aproximantă a sa care are eroarea absolută a. Este normal să considerăm pentru x^n aproximanta $(x^*)^n$ astfel încît avem

$$x^n = (x^* \pm a)^n.$$

Pentru a intui rezultatul într-o astfel de operație vom analiza cazurile:

1. Cînd exponentul $n = 2$, avem

$$x^2 = (x^* \pm a)^2 = (x^*)^2 \pm 2x^* \cdot a + a^2,$$

de unde

$$x^2 - (x^*)^2 = \pm 2x^* \cdot a + a^2.$$

Notînd cu $a^{(2)}$ eroarea absolută a puterii de exponent 2, rezultă

$$a^{(2)} = | x^2 - (x^*)^2 | = | \pm 2x^* \cdot a + a^2 |,$$

şi avînd în vedere că a^2 este o cantitate ce poate fi neglijată comparînd-o cu a, avem :

$$a^{(2)} \leqslant 2 | x^* | a,$$

care împărţită cu $| x |^2$ devine

$$\frac{a^{(2)}}{| x |^2} \leqslant 2 \frac{| x^* |}{| x |} \cdot \frac{a}{| x |}.$$

Notînd cu $e^{(2)}$ eroarea relativă a puterii de exponent 2 şi avînd în vedere că $\frac{| x^* |}{| x |} \approx 1$ avem :

$$e^{(2)} \approx 2e \text{ unde } e = \frac{a}{| x |}.$$

Avem deci :

Eroarea relativă a puterii de exponent 2 este aproximativ egală cu dublul erorii relative a bazei.

2. Cînd exponentul $n = 3$, avem

$$x^3 = (x^* \pm a)^3 = (x^*)^3 \pm 3(x^*)^2 a + 3x^* a^2 \pm a^3$$

sau

$$| x^3 - (x^*)^3 | = | \pm 3(x^*)^2 \cdot a + 3x^* a^2 \pm a^3 |.$$

Notînd cu $a^{(3)}$ eroarea absolută a puterii de exponent 3, rezultă

$$a^{(3)} \leqslant 3 | x^* |^2 a + 3 | x^* | a^2 + a^3.$$

Împărţind cu $| x |^3$, se obţine

$$\frac{a^{(3)}}{| x |^3} \leqslant 3 \frac{| x^* |^2}{| x |^2} \cdot \frac{a}{| x |} + 3 \frac{| x^* |}{| x |} \cdot \frac{a^2}{| x |^2} + \frac{a^3}{| x |^3}.$$

Deoarece $\frac{a^{(3)}}{| x |^3}$ reprezintă eroarea relativă, pe care o notăm cu $e^{(3)}$ şi ţinînd seama de valorile neînsemnate pe care le au termenii $\frac{a^2}{| x |^2}$ şi $\frac{a^3}{| x |^3}$ precum şi de $\frac{| x^* |}{| x |} \approx 1$, avem

$$e^{(3)} \approx 3e.$$

De unde, rezultă că :

Eroarea relativă a puterii de exponent 3 este aproximativ egală cu de 3 ori eroarea relativă a bazei.

Este evident că relaţiile au loc şi în cazul erorilor relative maxime care sînt nişte majorante ale erorilor relative.

Adică

$$E^{(2)} \approx 2E \text{ și } E^{(3)} \approx 3E.$$

Avînd în vedere că puterea de exponent n, număr natural, a unui număr oarecare este produsul de n factori egali cu numărul dat, putem extinde regula produsului de n factori la puterea de exponent n.

Deci putem considera

$$E^{(3)} \approx E^{(2)} + E \approx 2E + E = 3E,$$

$$E^{(4)} \approx E^{(3)} + E \approx 3E + E = 4E,$$

. . . .

$$E^{(n)} \approx E^{(n-1)} + E \approx (n-1)E + E = nE.$$

Pentru aplicații în cazul puterilor de exponent 2 sau 3 se pot folosi rezultatele obținute la înmulțire și de aceea nu vom indica alte procedee.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se scrie cîte două aproximante pentru numerele:

$$8\,752{,}9746\ ;\ 0{,}0007578945.$$

2. Ce fel de aproximantă este zero pentru numărul real x?

3. Dîndu-se două numere raționale x_1 și x_2 astfel încît $x_1 < x_2$, care dintre ele poate fi considerat aproximantă pentru celălalt?

4. Se dă numărul $x = \overline{2{,}7abc}$ și o aproximantă a sa $x^* = 2{,}797$. Ce cifre pot fi a, b, c pentru ca x^* să fie:

1°. o aproximantă prin lipsă;

2°. o aproximantă prin exces.

5. Să se aproximeze prin rotunjire numerele:

$$478{,}956025\ ;\ 1{,}0047075\ ;\ -7834500\ ;\ -2{,}653049,$$

păstrîndu-se primele k zecimale și să se spună tipul aproximării (lipsă sau exces) unde $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

6. Să se aproximeze prin rotunjire numerele:

$$754\,795{,}26\ ;\ -465\,376{,}572,$$

la cifra a n-a de la virgulă la stînga pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5$, precizîndu-se tipul rotunjirii.

7. Să se facă aproximarea prin trunchiere și să se precizeze felul aproximării pentru numerele:

$$0{,}001754\ ;\ 45{,}275476\ ;\ -175{,}4827\ ;\ -0{,}020765,$$

păstrîndu-se k zecimale unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

8. Să se facă aproximarea canonică (trunchiere) a numerelor :

1 794 536 ; −97 453 894 ; 6 285 439,799 ; −14 579 372,4568,

la cifra a n-a de la virgulă spre stînga pentru $n = 1, \ldots, 6$ şi să se precizeze de fiecare dată ce fel de aproximante sînt.

9. Dacă $x = \overline{a,bcd}$ şi aproximanta sa $x^* = \overline{8,2b}$ care pot fi cifrele a, b, c, d pentru ca :

1°. x^* să fie o aproximantă prin lipsă ;

2°. x^* să fie o aproximantă prin exces ?

10. Se dau numerele $x_1 = \overline{3a4,5}$ şi $x_2 = \overline{3ba}$. Să se determine cifrele a şi b astfel ca x_1 să fie aproximantă pentru x_2 :

1°. prin lipsă ;

2°. prin exces.

Poate fi x_2 o aproximantă pentru x_1 prin lipsă sau prin exces ?

11. Se dau numerele $x_1 = \overline{3,a5}$ şi $x_2 = \overline{3,5a}$. Care sînt cifrele ce pot fi puse în locul literei a pentru ca :

1°. x_1 să fie o aproximantă prin lipsă pentru x_2 ;

2°. x_2 să fie o aproximantă prin lipsă pentru x_1 ?

12. Se dau numerele $x_1 = \overline{0,\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ de zero}}aabb}$ şi $x_2 = \overline{0,\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ de zero}}abab}$. Care este relaţia între a şi b pentru ca :

1°. x_1 să fie o aproximantă prin lipsă pentru x_2 ;

2°. x_1 să fie o aproximantă prin exces pentru x_2 ?

13. Se dau numerele :

$$x_1 = \overline{0,0\ldots0abc}\,;$$

$$x_2 = \overline{0,0\ldots0acb}\,;$$

$$x_3 = \overline{0,0\ldots0bac}\,;$$ (Fiecare număr are k zerouri consecutive

$$x_4 = \overline{0,0\ldots0bca}\,;$$ după virgulă.)

$$x_5 = \overline{0,0\ldots0cab}\,;$$

$$x_6 = \overline{0,0\ldots0cba}.$$

Ştiind că x_1 este o aproximantă prin lipsă pentru x_2 şi x_2 o aproximantă prin exces pentru x_5, să se cerceteze ce fel de aproximante formează fiecare număr în parte pentru celelalte ?

14. Ştiind că $x_1 = \overline{0,5731a}$ este o aproximantă prin rotunjire pentru $x_2 = \overline{0,5731b7}$ şi că a este un pătrat perfect, să se stabilească ce cifre pot fi literele a, b ? Folosind configuraţia grafică a punctelor $P(a, b)$ unde a şi b sînt cifrele stabilite mai înainte, să se arate că acestea sînt coliniare.

15. Viteza luminii în vid este $c = 299{,}776 \cdot 10^6$ m/s. În calcul este considerată 300 000 km/s. Care sînt erorile absolută şi relativă ale aproximantei ?

16. Să se determine aproximantele prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare absolută mai mică decît 0,0001 ale numerelor:

a) 543,054965; b) 4,29208759; c) −65,493455; d) 59,7829736;

e) 5 792 736,27; f) −0,003.

17. Să se scrie cele două inegalități fundamentale în aproximarea numerelor precum și caracteristica pentru următoarele numere:

a) 4 753,5736; b) 1,756304; c) 0,5739843; d) 0,0004869;

e) −18 763,965; f) −7,29463; g) −0,826907; h) −0,00001.

18. Să se calculeze aproximanta lui $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ cu eroarea absolută mai mică decît $\frac{1}{2\cdot 10^3}$.

19. Să se calculeze aproximanta lui $\sqrt{20}$ cu eroarea absolută mai mică decît $\frac{1}{10^3}$.

20. Să se calculeze aproximanta lui π cu eroarea absolută mai mică decît $\frac{1}{2\cdot 10^6}$.

21. Să se calculeze aproximanta numărului $\frac{22}{7}$ cu eroarea absolută mai mică decît $\frac{1}{10^3}$.

22. Să se calculeze aproximanta numărului $\frac{15}{7}$ cu eroarea absolută mai mică decît $\frac{2}{113}$.

23. Poate fi aproximantă prin lipsă numărul π pentru numărul $\sqrt{10}$ cu o eroare absolută de $\frac{1}{10^2}$?

24. Luînd pentru numerele e și π respectiv aproximantele $e^* = 2{,}71828$ și $\pi^* = 3{,}14159$, să se calculeze erorile lor absolute și relative.

25. Distanța de 37,25 km s-a măsurat cu o precizie de 1 m iar distanța de 78 m s-a măsurat cu o precizie de 1 mm. În ce caz măsurarea a fost mai bună?

26. Din două cîntăriri succesive apreciem că masa unui corp este de 2,258 kg, iar eroarea absolută maximă este de 1 mg. Care este eroarea relativă maximă?

27. Măsurînd unghiurile ascuțite ale unui echer găsim mărimile 29°58′ și 60°2′. Știind că mărimile adevărate ale unghiurilor sînt 30° și respectiv 60°, să se calculeze eroarea absolută maximă și eroarea relativă maximă în ambele cazuri.

28. Să se determine eroarea relativă maximă pentru aproximantele numărului π care are k cifre sigure ($k = 1, 2, 3, 4$) fără regula de completare și cu regula de completare folosind tabelul III.1.

29. Se dă numărul $e^* = 2{,}718281828$ o aproximantă a numărului e cu 10 cifre sigure. Să se determine erorile absolute maxime și relative maxime fără regula de completare și cu regula de completare.

30. Se consideră $\frac{7}{11} \approx 0{,}637$. Să se calculeze erorile comise.

31. O aproximantă a lui $\sqrt{83}$ este 9,11. Să se stabilească ce erori s-au comis.

32. Numărul 9,805 este o aproximantă cu 4 cifre sigure a accelerației gravitaționale. Să se determine eroarea relativă maximă a aproximantei.

33. Eroarea absolută maximă a aproximantei lui $\sqrt{13}$ este de 1 %. Să se determine numărul de cifre sigure ale acestei aproximante.

34. Să se determine numărul de cifre sigure ale aproximantei lui $\sqrt{1\,491}$, considerînd succesiv că eroarea absolută maximă este 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 și 0,00001, folosind tabelul III.2.

35. Accelerația gravitațională la noi în țară (București) este $g_n = 9{,}805$ m/s². În calcule se utilizează $g = 9{,}8$ m/s². Care este eroarea? Dar în cazul cînd utilizăm $g = 10$ m/s²? Care sînt erorile absolută maximă și relativă maximă pentru aceste două aproximante?

36. Masa electronului în stare de repaus este $m_e = \frac{9{,}108}{10^{28}}$ g. Considerîndu-se în calcule $m_e = \frac{1}{10^{27}}$ g, care este eroarea aproximantei?

37. Constanta lui Planck este $h = \frac{6{,}625}{10^{34}}$ J·s. Determinați erorile absolute, absolute maxime, relative și relative maxime cînd considerăm aproximantele $h_1 = \frac{7}{10^{34}}$ J·s și $h_2 = \frac{6{,}6}{10^{34}}$ J·s.

38. Valoarea magnetonului Procopiu-Bohr este $\mu_B = \frac{9\,268}{10^{27}} \cdot \frac{\text{J}}{\text{T}}$. Determinați erorile: absolute, absolute maxime, relative și relative maxime, cînd ca aproximante considerăm $\mu_{B_1} = \frac{927}{10^{26}} \cdot \frac{\text{J}}{\text{T}}$, $\mu_{B_2} = \frac{93}{10^{25}} \cdot \frac{\text{J}}{\text{T}}$ și $\mu_{B_3} = \frac{1}{10^{23}} \cdot \frac{\text{J}}{\text{T}}$.

39. Masa moleculară relativă a acidului etanoic (CH_3COOH) este 60,05. Determinați erorile: absolută, absolută maximă, relativă și relativă maximă, cînd considerăm drept aproximante 60,1 și 60.

40. Determinări experimentale ale greutății specifice a apei distilate (H_2O) au condus la următoarele rezultate; $\gamma_1 = 9\,808{,}44021$ N/m³, $\gamma_2 = 9\,809{,}7253$ N/m³ și $\gamma_3 = 9\,792{,}342$ N/m³. În rezolvarea problemelor de

chimie sau fizică, deseori, considerăm greutatea specifică a apei $\gamma = 9\,810$ N/m³. Să se determine erorile: absolute, absolute maxime, relative și relative maxime ale aproximantei γ, față de valorile indicate prin măsurători.

41. Măsurători ale densității mercurului la presiunea de 760 torri au condus la valorile: $\rho_1 = 13\,595{,}1$ kg/m³ și $\rho_2 = 13\,545{,}7$ kg/m³. În rezolvarea unor probleme, considerăm densitatea mercurului $\rho = 13\,600$ kg/m³. Determinați erorile: absolută, absolută maximă, relativă și relativă maximă ale aproximantei, în acest caz.

42. Să se calculeze suma:

$$0{,}816 + 1{,}173 + 1{,}6391 + 1{,}2928 + 0{,}7710 + 1{,}9768 + 2{,}1098$$

cu două zecimale sigure și apoi să se calculeze eroarea absolută maximă știind că pentru fiecare număr eroarea absolută este indicată de ultima lui zecimală.

43. Să se calculeze suma

$$759{,}43578 + 0{,}0072376 + 1{,}0051429$$

cu o eroare absolută de $\frac{1}{10^4}$. Pentru cazul în care erorile relative ale termenilor sumei sînt $\frac{1}{10^5}$, $\frac{1}{10^6}$ și respectiv $\frac{1}{10^7}$, să se calculeze eroarea relativă maximă a sumei.

44. Dacă suma numerelor

$$926{,}4598 + 1{,}5737983 + 0{,}027936$$

are eroarea absolută maximă $\frac{2}{10^3}$, cît pot fi erorile absolute ale numerelor? Dar dacă eroarea relativă a sumei este $\frac{1}{10^4}$, care pot fi erorile relative ale termenilor?

45. Să se calculeze

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8},$$

cu o eroare de $\frac{1}{10^3}$.

46. Să se calculeze cu exactitate și cu aproximație diferența

$$1{,}4823 - 0{,}265.$$

Care sînt erorile care se produc?

47. Să se calculeze cu trei cifre sigure produsul

$$85{,}279432 \cdot 7{,}36972 \cdot 0{,}2459704.$$

48. Un mobil se deplasează cu viteza de 34,15 km/h timp de 2,45 ore. Să se determine eroarea relativă și numărul de cifre sigure ale aproximantei care dă spațiul parcurs de mobil.

49. Într-o mișcare circulară pe un cerc cu raza π un mobil se deplasează cu o viteză constantă $v = 2{,}71828$ în timpul t dat de rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 + 4x - 1 = 0$. Să se calculeze eroarea relativă și numărul de cifre sigure ale aproximantei care dă spațiul parcurs de mobil cînd raza cercului, viteza mobilului și timpul sînt date cu trei cifre sigure.

50. Să se calculeze erorile absolute și relative ale numărului π cînd se iau următoarele aproximanțe

$$3\ ;\ 3{,}14\ ;\ 3 + \frac{10}{7};\ \frac{355}{113}.$$

51. Să se calculeze volumul sferei

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

știind că $R = 0{,}5 + \alpha$ cu $|\alpha| \leqslant \frac{1}{10^3}$.

52. Să se calculeze cu aproximație de $\frac{1}{10^4}$ numărul

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}.$$

53. Numerele 863,4562 și 0,0725 sînt date cu o eroare absolută maximă de $\frac{1}{10^4}$. Care este eroarea absolută maximă a diferențelor lor? Dar eroarea relativă maximă?

54. Eroarea absolută maximă a diferenței,

$$53\,978{,}47978 - 3{,}27544,$$

este de $\frac{1}{10^5}$. Care pot fi erorile absolute maxime ale termenilor?

55. Să se stabilească eroarea relativă maximă a produsului $123{,}4792 \cdot 53{,}797 \cdot 5\,729{,}37$ știind că factorii au respectiv erorile relative indicate de ultima lor zecimală.

56. Cîte cifre sigure are produsul:

$$0{,}75397 \cdot 1{,}64285 \cdot 26{,}37492,$$

știind că fiecare dintre factori are toate cifrele sigure?

57. Să se calculeze cu două cifre sigure produsul:

$$0{,}75059732 \cdot 0{,}003579472 \cdot 0{,}400297594.$$

58. Să se calculeze cu primele două zecimale sigure produsul:

$$32{,}125472 \cdot 16{,}255463,$$

ştiind că unul din factori are primele trei zecimale sigure.

59. Să se stabilească eroarea relativă maximă a cîtului,

$$15{,}47983 : 3{,}12142,$$

ştiind că erorile relative ale deîmpărţitului şi împărţitorului sînt date de **ultimele** lor zecimale.

60. Să se stabilească numărul de cifre sigure ale cîtului,

$$69{,}5793 : 23{,}1821,$$

ştiind că deîmpărţitul şi împărţitorul au fiecare ultima zecimală cifră îndoielnică.

61. Să se calculeze cîtul,

$$0{,}849732 : 0{,}4235794,$$

avînd cel puţin primele două cifre sigure.

62. Să se calculeze cîtul,

$$56{,}379 : 28{,}378,$$

cu prima zecimală sigură ştiind că unul din factori are cel puţin două zecimale sigure.

63. Să se calculeze:

$(24{,}5679436)^2$ astfel ca rezultatul să aibă prima zecimală sigură.

III.14. Operaţii logice

III.14.1. Introducere

Aţi observat desigur că analiza şi rezolvarea oricărei probleme se reduc, în ultimă instanţă, la o înlănţuire de afirmaţii (propoziţii sau fraze) care ne permit să tragem anumite concluzii.

De multe ori credem că am gîndit corect, că am judecat bine, dar lucrurile nu stau aşa.

Astfel, plecînd de la afirmaţia : „oamenii înalţi sînt buni sportivi" mulţi se grăbesc să conchidă că „oamenii mici de statură nu sînt buni sportivi" ceea ce nu este adevărat.

Sau din propoziţiile :

„Toţi oamenii în vîrstă sînt înţelepţi"

„Badea Ilie este înţelept"

să se deducă „Badea Ilie este în vîrstă", afirmaţie incorectă, deoarece cele două propoziţii nu ne permit să apreciem vîrsta lui Badea Ilie.

Un alt tip de greşeală de logică frecventă este negarea incorectă a propoziţiilor.

De exemplu, se obişnuieşte să se nege propoziţia „Ionescu este deştept" prin „Ionescu este prost", ceea ce nu este corect din punct de vedere al logicii, deoarece negaţia unei propoziţii de tipul „A este B" este „A nu este B", şi nu „A este non-B".

Şi în raţionamentele matematice pot apărea greşeli de logică. Astfel, este greşit ca din afirmaţia „dacă un triunghi are 2 unghiuri congruente atunci el este isoscel" să se deducă afirmaţia „dacă un triunghi are două unghiuri diferite atunci el nu este isoscel".

Se pune atunci întrebarea : cum putem avea certitudinea că am raţionat corect, că am dedus concluzii adevărate şi că modul în care le-am obţinut din informaţiile iniţiale este cel corect ?

Răspunsul la această întrebare ni-l dă *logica — ştiinţa care descoperă şi formulează legile gîndirii corecte.*

Logica s-a dezvoltat încă din antichitate, fiind fondată în secolul al IV-lea î.e.n. de Aristotel. Apropiată ca spirit atît de filozofie cît şi de matematică, logica a beneficiat de aportul ambelor ştiinţe. Începînd din secolul al XIX-lea unii matematicieni şi filozofi au încercat să studieze logica cu metode matematice. Ideea era să se realizeze şi în logică acel salt calitativ reprezentat în matematică de trecerea de la rezolvarea aritmetică la rezolvarea algebrică. Pentru aceasta propoziţiile au fost notate cu simboluri[1], cu ele efectuîndu-se operaţii respectînd anumite reguli. Ideea calculului logic, iniţial formulată de Leibniz[2], a fost preluată de A. De Morgan[3] şi G. Boole[4] care au pus bazele algebrei logicii.

Astfel, logica a devenit mai riguroasă şi mai uşor de aplicat, nu numai în viaţa de toate zilele şi în rezolvarea problemelor specifice diferitelor domenii ştiinţifice, dar şi în dezvoltarea unor discipline cu pronunţat caracter practic, ca de pildă : programarea calculatoarelor, automatizări bazate pe circuite cu contacte şi relee sau pe circuite electronice etc.

---

[1] Logica matematică se mai numeşte şi logică simbolică.

[2] G. W. Leibniz (1646—1716), matematician şi filozof german.

[3] Augustus De Morgan, matematician englez (1806—1871).

[4] George Boole, matematician şi logician irlandez (1815—1864).

La noi în țară, o contribuție deosebită în dezvoltarea logicii matematice au avut-o oamenii de știință Gr. C. Moisil, E. Mihăilescu, O. Onicescu, A. Dumitriu, M. Tîrnoveanu, școala românească de logică fiind cunoscută în întreaga lume.

III.14.2. Calculul propozițiilor

Deoarece obiectul logicii este studiul formelor corecte de raționament, iar un raționament constă dintr-o înlănțuire de judecăți, în logică interesează modul în care se leagă între ele propozițiile și în primul rînd, cum plecînd de la unele propoziții (considerate ca „materie primă") putem construi alte propoziții. Elementele de construcție se numesc „propoziții simple" (de exemplu : „Mă pasionează calculatoarele", „Studiez informatica").

Propozițiile formate din propoziții simple, cu ajutorul unor cuvinte de legătură, se numesc propoziții compuse (de pildă: „Mă pasionează calculatoarele și studiez informatica", „Dacă mă pasionează calculatoarele, atunci studiez informatica"; cuvintele de legătură fiind „și", „Dacă... atunci..."). Cu aceleași propoziții simple se pot forma propoziții compuse diferite.

Partea logicii matematice care studiază legăturile dintre propoziții, fără a ține seama de structura internă a propozițiilor simple, se numește logica propozițiilor sau calcul propozițional.

Urmărind tratarea logicii cu mijloace matematice, vom reprezenta simbolic propozițiile prin formule care seamănă ca structură cu cele algebrice.

Vom nota propozițiile (simple sau compuse) cu litere mari ale alfabetului latin. De exemplu, notăm propozițiile simple : „Citesc o carte interesantă" cu P, „La T.V. este un film în premieră" cu Q, „Stau acasă" cu litera R, iar propoziția compusă : „Dacă citesc o carte interesantă sau la T.V. este un film în premieră, atunci stau acasă" cu A. Observăm că, de fapt, formula A este „Dacă P sau Q atunci R". Adevărul sau falsitatea unei propoziții se numește valoarea sa logică (sau valoarea de adevăr) și se notează cu $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{F}$.

Întrucît aceeași propoziție simplă poate fi, după împrejurări, adevărată sau nu, în logica matematică se face abstracție de sensul său. Cu alte cuvinte, vom presupune că nu știm care este valoarea sa de adevăr ci doar că aceasta poate fi ori $\mathcal{A}$ ori $\mathcal{F}$.

La lecțiile de algebră s-au prezentat principalele operații logice, de aceea le vom considera cunoscute, ele fiind recapitulate în tabelul III.3*. Cu ajutorul acestor operații se pot construi propoziții compuse din propoziții simple.

---

* În tabel figurează pe lîngă cele cinci operații logice elementare și disjuncția exclusivă, datorită frecventelor aplicații în care apare (circuite logice, programare).

Tabelul III.3

P	$\neg P$
A	F
F	A

Negația unei propoziții P este adevărată dacă propoziția P este falsă și este falsă dacă propoziția P este adevărată.

P	Q	$P \wedge Q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

Conjuncția propozițiilor P și Q este adevărată doar dacă ambele propoziții P și Q sînt adevărate și este falsă cînd cel puțin una din propozițiile P și Q este falsă.

P	Q	$P \vee Q$
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

Disjuncția propozițiilor P și Q este adevărată dacă cel puțin una din propozițiile P și Q este adevărată și este falsă numai cînd ambele propoziții sînt false.

P	Q	$P \veebar Q$
A	A	F
A	F	A
F	A	A
F	F	F

Disjuncția exclusivă a propozițiilor P și Q este adevărată numai dacă una din propozițiile P și Q este adevărată și este falsă cînd propozițiile au aceeași valoare logică.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

Implicația propoziției Q prin propoziția P este falsă numai atunci cînd P este adevărată și Q este falsă; în toate celelalte cazuri ea este adevărată.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	A

Echivalența propozițiilor P și Q este adevărată atunci cînd P și Q au aceeași valoare logică și este falsă cînd P și Q au valori logice diferite.

La rîndul lor propozițiile compuse se pot lega între ele cu propoziții simple și se obțin noi propoziții.

În evaluarea unei propoziții compuse ordinea de efectuare a operațiilor este : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Pentru a indica altă ordine de efectuare a operațiilor se folosesc paranteze.

Astfel, formula : $P \wedge \neg P \vee Q$ este diferită de $P \wedge \neg(P \vee Q)$. Sau, de exemplu, formula :

$$\underbrace{P \Rightarrow \underbrace{Q \vee \underbrace{\underbrace{\neg P}_{1} \wedge R}_{2}}_{3}}_{4}$$

este diferită de formula :

$$\underbrace{\underbrace{(P \Rightarrow Q)}_{3} \vee \underbrace{\underbrace{\neg P}_{1} \wedge R}_{2}}_{4}.$$

Cu ajutorul tabelelor de adevăr putem determina valorile logice ale oricărei formule compuse, ținînd seama de toate combinațiile posibile de valori logice ale componentelor.

Fie formula : $A = P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$.

Aceasta are drept componente pe P și Q, legate prin conectorii $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Ordinea de efectuare a operațiilor arată că întîi se face negația lui Q, apoi conjuncțiile $P \wedge Q$ și $P \wedge \neg Q$, iar la urmă disjuncția acestor două formule.

Pentru scrierea tabelului completăm întîi coloanele P și Q (corespunzătoare formulelor simple din care este compusă formula A), cu toate combinațiile posibile de valori logice. Fiecare formulă simplă avînd numai două valori logice posibile și n fiind numărul formulelor simple, care intervin într-o formulă compusă, tabelul va avea 2^n linii, deoarece cu n elemente care pot lua două valori diferite, se pot forma 2^n combinații de valori distincte. Rezultă că tabelul de adevăr al formulei A va avea $2^2 = 4$ linii.

Se completează pe rînd cîte o linie. Fiecare coloană corespunde unei propoziții, obținute printr-una din cele cinci operații logice, din propoziții ale căror valori logice figurează în coloane precedente. Valoarea logică a propoziției se determină conform tabelului de adevăr al operației în cauză.

Evaluarea corectă a formulelor cu mai multe operații logice este deosebit de importantă pentru tehnica de calcul. Vom da numai cîteva exemple.

Tabelul III.4

	P	Q	$\rceil Q$	$P \wedge Q$	$P \wedge \rceil Q$	$P \wedge Q \vee P \wedge \rceil Q$
1	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$
2	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
3	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
4	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

La calculul liniei 2, de exemplu, s-a procedat astfel:

$$\underbrace{\underbrace{\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}}_{\mathcal{F}} \vee \underbrace{\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}}_{\mathcal{A}}}_{\mathcal{A}} \quad (P \wedge Q \vee P \wedge \rceil Q)$$

Există circuite logice, fundamentale în realizarea echipamentelor de calcul, care realizează funcţia logică de negaţie a disjuncţiei (circuite „NOR") şi funcţia logică de negaţie a conjuncţiei (circuite „NAND"). Acestea, la rîndul lor, intră în componenţa multor circuite mult mai complexe, cu ajutorul cărora se implementează funcţiile echipamentului.

Sau, printre instrucţiunile maşină ale minicalculatoarelor româneşti se numără două instrucţiuni logice BIC şi BIS care evaluează formulele logice $P = P \wedge \rceil Q$, respectiv $P = P \vee Q$, unde P şi Q reprezintă biţii dintr-o zonă de memorie (valorii 1 îi corespunde valoarea logică $\mathcal{A}$ şi valorii 0 — valoarea logică $\mathcal{F}$). De exemplu, cu BIC se pot compara două configuraţii binare de 16 biţi (cuvinte de memorie) şi poziţiona pe 0 biţii cu valoarea 1 din prima configuraţie, cărora le corespund biţi 1 în cea de-a doua:

	înainte	*după* execuţia instrucţiunii BIC, A, B
A:	1111111111111111	1101001100010010
B:	0010110011101101	0010110011101101

De asemenea, în descrierea rezolvării unei probleme, poate să fie necesar să se exprime condiţii compuse, care de fapt reprezintă formule logice cu mai multe operaţii logice.

III.14.2.1. *Diagrame Euler-Venn*

În cazul formulelor cu cel mult trei propoziţii simple componente este uşor să se obţină o reprezentare geometrică pentru valoarea de adevăr a formulei respective.

Să considerăm un dreptunghi, iar în interiorul lui să delimităm o anumită zonă printr-o curbă închisă. Domeniul închis de curbă va reprezenta,



Fig. III.1

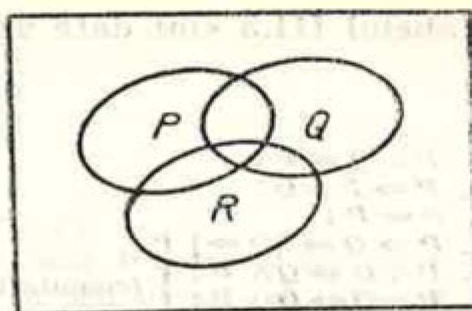


Fig. III.2

pentru o propoziție oarecare P, valoarea $\mathcal{A}$, iar zona exterioară domeniului — valoarea $\mathcal{F}$ (fig. III.1).

În cazul propozițiilor compuse, fiecare componentă va fi reprezentată printr-un domeniu. Pentru a reprezenta toate combinațiile posibile de valori logice, domeniile se aleg astfel încît să se intersecteze în toate modurile posibile (fig. III.2).

Astfel de reprezentări ale operațiilor logice se numesc diagrame Euler-Venn[1].

Pentru a descrie o anumită operație logică, figurăm propozițiile componente și hașurăm porțiunea în care propoziția compusă rezultată are valoarea $\mathcal{A}$; porțiunea nehașurată va reprezenta valoarea $\mathcal{F}$ a propoziției (conjuncția este ilustrată de figurile III.3, *a* și III.3, *b*).

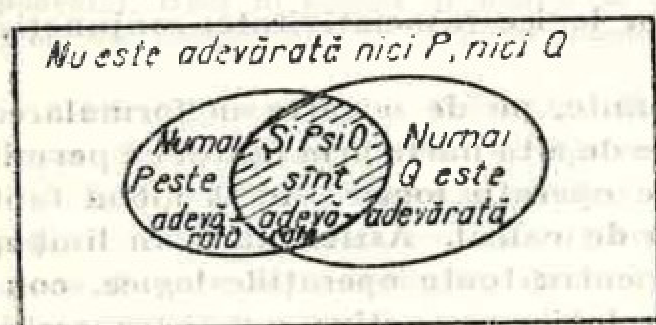


Fig. III.3, *a*

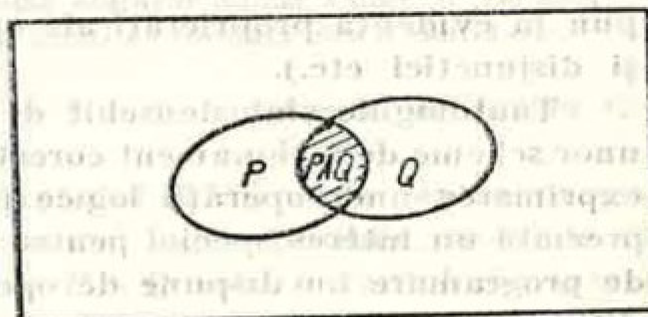


Fig. III.3, *b*

III.14.2.2. *Tautologii și contradicții*

Se știe, de la algebră, că o formulă care are valoarea logică $\mathcal{A}$, indiferent de valoarea logică a componentelor, se numește *tautologie*, sau *formulă identic adevărată*, sau încă *formulă validă*. Analog, formulele care au întotdeauna valoarea logică $\mathcal{F}$ se numesc *contradicții*, sau *formule identic false*, sau *formule nerealizabile*.

[1] După numele matematicienilor L. Euler (1707–1783) și J. Venn care au introdus astfel de reprezentări pentru mulțimi și propoziții.

În tabelul III.5 sînt date unele din cele mai utilizate tautologii.

Tabelul III.5

T. 1. $P \wedge Q \Rightarrow P$;
T. 2. $P \Rightarrow P \vee Q$;
T. 3. $P \Rightarrow P$;
T. 4. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \rceil Q \Rightarrow \rceil P$;
T. 5. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$;
T. 6. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$; } (comutativitatea pentru $\wedge$ și $\vee$);
T. 7. $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$;
T. 8. $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$; } (asociativitatea pentru $\wedge$ și $\vee$);
T. 9. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
T.10. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$; } (distributivitatea $\vee$ și $\wedge$);
T.11. $P \wedge P \Leftrightarrow P$;
T.12. $P \vee P \Leftrightarrow P$; (idempotență);
T.13. $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$;
T.14. $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$; (absorbția);
T.15. $\rceil \rceil P \Leftrightarrow P$;
T.16. $P \vee \rceil P$; (principiul terțiului exclus);
T.17. $\rceil (P \wedge \rceil P)$; (principiul necontradicției);
T.18. $\rceil (P \wedge Q) \Leftrightarrow \rceil P \vee \rceil Q$;
T.19. $\rceil (P \vee Q) \Leftrightarrow \rceil P \wedge \rceil Q$; } (legile lui De Morgan);
T.20. $\rceil (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \rceil Q$; T.20′. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \rceil P \vee Q$;
T.21. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ (tranzitivitatea implicației);
T.22. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Consultînd tabelul se observă că o mare parte din tautologiile prezentate pun în evidență proprietăți ale operațiilor logice (asociativitatea conjuncției și disjuncției etc.).

Tautologiile sînt deosebit de importante, pe de o parte în formularea unor scheme de raționament corecte, iar pe de altă parte prin faptul că permit exprimarea unor operații logice prin alte operații logice. Acest ultim fapt prezintă un interes special pentru tehnica de calcul. Astfel, dacă un limbaj de programare nu dispune de operatori pentru toate operațiile logice, condițiile din algoritm în care apar operațiile logice respective pot fi transcrise în limbaj de programare folosind proprietăți de tipul celor exprimate de tautologiile T20 ÷ T22. Astfel, de exemplu, în FORTRAN, o condiție de tipul $A \Rightarrow B$ cu A și B variabile logice, se va codifica prin .NOT.*A*.OR.*B* (.AND., .NOT., .OR. fiind operatorii FORTRAN pentru $\wedge$, $\rceil$ și $\vee$), acest limbaj neavînd un operator logic corespunzător implicației. Pe de altă parte, o situație similară poate apărea și la realizarea circuitelor logice (prin combinații de circuite „NOR" și „NAND" se pot realiza circuite logice care să descrie orice formulă logică).

Observația 1. Să considerăm formula $\rceil (P \wedge Q) \Leftrightarrow \rceil P \vee \rceil Q$; dacă în $\rceil (P \wedge Q)$ și în $\rceil P \vee \rceil Q$ schimbăm pe $\wedge$ cu $\vee$ și pe $\vee$ cu $\wedge$ se vede că obținem cea de-a doua lege a lui De Morgan (T.19). Acest lucru nu este întîmplător, ci exprimă o proprietate a conjuncției și disjuncției numită dualitate. Prin duala unei formule se înțelege formula obținută prin schimbarea conectorilor $\wedge$ și $\vee$ cu $\vee$, respectiv $\wedge$. Duala unei formule are același tabel de adevăr cu negația formulei în care s-a substituit P cu $\rceil P$ și invers.

Astfel, fie de exemplu formula:

$$P \wedge \rceil P.$$

Duala sa este: $P \vee \rceil P$.

Plecînd de la formula inițială obținem

a) negația $\rceil(P \wedge \rceil P)$

b) substituția P cu $\rceil P$ și $\rceil P$ cu P ne dă $\rceil(\rceil P \wedge P)$,

ceea ce revine la $\rceil(\rceil P) \vee \rceil P$, adică $P \vee \rceil P$. Astfel, dacă A și B sînt formule compuse construite din formule simple sau negații ale formulelor simple, numai cu ajutorul operațiilor $\wedge$ și $\vee$ și dacă A' și B' sînt formule obținute din A și B prin schimbarea lui $\wedge$ cu $\vee$ și a lui $\vee$ cu $\wedge$, atunci:

1) dacă $\rceil A$ este tautologie și A' este tautologie;
2) dacă A este tautologie și $\rceil A'$ este tautologie;
3) dacă $A \Leftrightarrow B$ este tautologie și $A' \Leftrightarrow B'$ este tautologie;
4) dacă $A \Rightarrow B$ este tautologie și $B' \Rightarrow A'$ este tautologie.

Observația 2. În cazul în care o tautologie se exprimă printr-o echivalență (ca de pildă T.19: $\rceil(P \vee Q) \Leftrightarrow \rceil P \wedge \rceil Q$) se spune că formulele legate prin semnul „$\Leftrightarrow$" sînt logic echivalente (au aceleași valori logice). Într-o formulă compusă, o anumită componentă poate fi inlocuită printr-o formulă logic echivalentă, fără ca valoarea logică a formulei compuse să se modifice. Astfel,

$$P \wedge Q \vee \rceil(\rceil R \wedge \rceil S) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \vee S \text{ în virtutea lui T.19 și T.15.}$$

Observația 3. Pentru a constata că o formulă este identic adevărată nu este totdeauna necesar să construim tabelul de adevăr (sau diagrama Euler-Venn) pentru toate propozițiile simple componente (acest lucru devenind și foarte complicat pentru formule cu multe componente). Dacă în tabelul de adevăr al unei formule obținem numai valori $\mathcal{A}$ considerînd propoziții componente, nu neapărat simple, putem fi siguri că formula este o tautologie.

Fie, de exemplu, formula (1) $P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$, care este de forma (2) $A \Rightarrow A$ cu A propoziția compusă $P \wedge Q$.

Din tabelul de adevăr pentru $A \Rightarrow A$ (tabelul III.6) unde pentru propoziția compusă A am considerat cele două valori logice posibile, se vede că $A \Rightarrow A$ este o tautologie, deci și $P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$ este o tautologie (acest lucru se poate verifica și pe tabelul III.7, unde am calculat întîi valorile

Tabelul III.6

A	$A \Rightarrow A$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$

Tabelul III.7

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$

pentru $P \wedge Q$, adică A și plecînd de la acestea valorile implicației $P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$).

Să observăm acum că tabelul de adevăr pentru $A \Rightarrow A$ și cel pentru $P \Rightarrow P$ (tabelul III.8) cu P propoziție simplă diferă numai prin notații. Astfel

pentru a arăta că $A \Rightarrow A$ este tautologie este suficient să arătăm că $P \Rightarrow P$ este tautologie și apoi să înlocuim pe P cu A în $P \Rightarrow P$.

Tabelul III.8

P	$P \Rightarrow P$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$

Tabelul III.9

P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$

Raționind ca în exemplul precedent se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 1 (teorema substituției). **Fie A o propoziție compusă din propozițiile simple $P_1, P_2, \ldots, P_n$ și B o propoziție compusă obținută prin înlocuirea în A a propozițiilor simple $P_1, \ldots, P_n$ cu propozițiile compuse $Q_1, \ldots, Q_n$. Dacă A este tautologie atunci și B este tautologie.**

Această teoremă este importantă deoarece permite:

a) să afirmăm că lista de tautologii T.1 – T.22 este valabilă pentru P Q și R formule oarecare;

b) să extindem lista de tautologii.

Trebuie să observăm că reciproca teoremei nu este adevărată; dacă A nu este tautologie, B poate sau nu să fie o tautologie. Astfel, dacă A este formula $P \vee Q$ (știm că disjuncția nu este o tautologie) și înlocuim pe Q cu $\neg P$ obținem $B = P \vee \neg P$ care este o tautologie (principiul terțiului exclus). Înlocuind însă pe Q cu $\neg Q$ obținem $B = P \vee \neg Q$, care nu mai este tautologie (vezi tabelul III.9).

Există și alte rezultate importante care ne permit să stabilim că anumite formule sînt tautologii.

Fie următoarea:

Teorema 2. **Dacă A este tautologie și dacă $A \Rightarrow B$ este tautologie atunci și B este tautologie.**

A demonstra această teoremă revine la a determina în condițiile date valorile logice ale lui B (tabelul III.10).

Tabelul III.10

A	B	$A \Rightarrow B$
$\mathcal{A}$	?	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	?	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	?	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	?	$\mathcal{A}$

Tabelul III.11

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$

Din tabelul de adevăr al implicației (tabelul III.11) se vede că $P \Rightarrow Q$ are valoarea $\mathcal{A}$ pentru $P = \mathcal{A}$ numai dacă și Q este $\mathcal{A}$. Substituind pe A lui P și pe B lui Q, ajungem la concluzia că B este tautologie.

Să utilizăm această teoremă și teorema substituției pentru a arăta că $P \vee \rceil P \vee Q$ este o tautologie, fără a construi tabelul de adevăr.

Într-adevăr să înlocuim în $P \Rightarrow P \vee Q$ (T.2) pe P cu $P \vee \rceil P$; obținem $P \vee \rceil P \Rightarrow P \vee \rceil P \vee Q$. Aceasta este o tautologie, conform teoremei substituției. Pe de altă parte, deoarece $P \vee \rceil P$ este o tautologie, din teorema 2 rezultă că și $P \vee \rceil P \vee Q$ este o tautologie c.c.t.d.

III.14.2.3. *Raționament*

Pentru rezolvarea unei probleme, formulăm mai multe propoziții care exprimă judecăți legate între ele.

Să urmărim următoarele propoziții:

„Dacă plouă, Andrei își ia umbrela".

„Plouă".

„Așadar, Andrei își ia umbrela".

Observăm că ultima propoziție apare ca o urmare a celorlalte două; prima propoziție ne spune ce face Andrei dacă plouă; a doua propoziție precizează: „Plouă"; acum știm ce face Andrei și anume „își ia umbrela".

O înlănțuire de judecăți (propoziții) în care plecînd numai de la anumite cunoștințe — consemnate într-un număr de propoziții numite premise — se ajunge la o cunoștință nouă — exprimată printr-o propoziție numită concluzie — se numește *raționament*.

Astfel, înlănțuirea de judecăți din exemplul precedent este un raționament, avînd drept premise: „Dacă plouă, Andrei își ia umbrela" și „Plouă", iar drept concluzie „Așadar Andrei își ia umbrela".

Un raționament este corect dacă și numai dacă concluzia derivă din premise.

Raționamentul din exemplul anterior este corect, la fel și raționamentul:

Premise: „$x + y = 10$"

„$x = 3$"

Concluzie: „$y = 7$".

Nu trebuie confundată corectitudinea unui raționament cu adevărul concluziei. Astfel, raționamentul:

Premise: „Toți copacii sînt păsări"

„Toate păsările pot înota"

Concluzie: „Toți copacii pot înota"

este corect, dar concluzia este falsă, decurgînd din premise false.

Raţionamentul:
Premise: „Toate păsările cîntă";
„Toate rîndunelele cîntă".
Concluzie: „Toate rîndunelele sînt păsări",

este incorect, deşi concluzia este adevărată. Raţionamentul este incorect deoarece concluzia nu derivă din premise.

Să considerăm acum ca premise ale unui raţionament propoziţiile:
„Dacă măsura $\measuredangle A =$ măsura $\measuredangle B$, triunghiul ABC este isoscel"
„Dreptele D_1 şi D_2 sînt paralele".

Din aceste două propoziţii nu putem desprinde nici o concluzie, deci nu orice propoziţii considerate drept premise ne conduc la o concluzie.

Aşadar logica, avînd menirea să descopere şi să formuleze legile gîndirii corecte, adică formele corecte de raţionament, trebuie să răspundă la următoarea întrebare:

Avînd o mulţime de propoziţii adevărate, considerate drept premise cum putem ajunge la concluzii şi care sînt acestea?

III.14.2.4. *Tipuri de raţionamente*

Pe baza proprietăţilor operaţiilor logice se pot construi raţionamente corecte. Acestea constituie „modele" de raţionament valabile în orice teorie în care despre o anumită propoziţie putem spune că este fie adevărată, fie falsă, dar nu ambele, adică în orice domeniu în care este valabil principiul bivalenţei.

După cum s-a mai precizat, în cele ce urmează, se va vedea că diferitele tipuri de raţionamente valabile se bazează pe tautologii.

III.14.2.4.1. *Raţionament prin modus ponens*

Cel mai simplu tip de raţionament şi, în acelaşi timp, elementul pe care se fundamentează toate tipurile de raţionamente este următorul: „dacă P şi în acelaşi timp $P \Rightarrow Q$, atunci Q". Observăm că acest mod de gîndire ne este firesc, deoarece sîntem obişnuiţi cu el atît din matematică, cît şi din viaţa de toate zilele. De asemenea, să ne amintim că pentru a demonstra teorema 2 am arătat că dacă P este adevărată şi $P \Rightarrow Q$ este adevărată, atunci Q este adevărată.

Un astfel de raţionament se numeşte modus ponens, deci, dacă P şi $P \Rightarrow Q$ sînt propoziţii adevărate atunci şi Q este adevărată.

P şi $P \Rightarrow Q$ sînt premisele raţionamentului, iar Q concluzia. Acest lucru se scrie:

$$\begin{array}{c} P \\ P \Rightarrow Q \\ \hline Q. \end{array}$$

Astfel, de exemplu, considerînd adevărate propozițiile :

„Dacă mă scol devreme, nu întîrzii la școală"

și

„Mă scol devreme"

prin modus ponens rezultă că este adevărată și propoziția :

„Nu întîrzii la școală".

Sau, considerînd adevărate propozițiile :

„$x = 2y$" și „$x = 2y \Rightarrow x$ este divizibil cu 2", atunci este adevărată și propoziția „x este divizibil cu 2".

Vom da în continuare exemple și de alte tipuri de raționamente :

III.14.2.4.2. *Raționament prin contrapoziție (modus tollens)*

Dacă propozițiile $P \Rightarrow Q$ și $\rceil Q$ sînt adevărate, atunci este adevărată și propoziția $\rceil P$; adică :

$$\frac{\begin{array}{c}P \Rightarrow Q\\ \rceil Q\end{array}}{\rceil P.}$$

Într-adevăr, conform T.20', $P \Rightarrow Q$ este logic echivalentă cu $\rceil P \vee Q$, deci rezultă că dacă $P \Rightarrow Q$ este adevărată atunci și $\rceil P \vee Q$ este adevărată ; $\rceil Q$ fiind adevărată, Q este falsă. Deci pentru ca disjuncția $\rceil P \vee Q$ să fie adevărată trebuie ca $\rceil P$ să fie adevărată (rezultă din tabelul de adevăr al disjuncției).

Fie, de exemplu, $P \Rightarrow Q$ teorema de geometrie :

„Dacă un triunghi ABC este isoscel, atunci triunghiul ABC are două unghiuri congruente". Atunci $\rceil Q$ este propoziția : „Triunghiul ABC nu are două unghiuri congruente" pe care o considerăm adevărată. Putem afirma imediat că $\rceil P$ este adevărată, adică : „triunghiul ABC nu este isoscel".

III.14.2.4.3. *Raționament prin reducere la absurd*

Fie A o formulă despre care vrem să arătăm că este adevărată. Pentru aceasta vom presupune că A este falsă, deci că de fapt este adevărată formula $\rceil A$.

Pornind de la această presupunere deducem o anumită propoziție $\rceil B$, care este în contradicție cu un adevăr B cunoscut (B este întotdeauna adevărată în teoria considerată), ceea ce este absurd. Rezultă că $\rceil A$ este falsă, deci A este adevărată.

Formalizat, acest tip de raționament se scrie :

$$\frac{\begin{array}{c}\rceil A \Rightarrow B\\ \rceil A \Rightarrow \rceil B\end{array}}{A}$$

și poartă numele de raționament prin reducere la absurd.

Acesta este un raţionament corect. Într-adevăr, B fiind adevărată şi $\urcorner A \Rightarrow B$ este adevărată. Dar şi $\urcorner A \Rightarrow \urcorner B$ este adevărată. Aceste două implicaţii sînt însă simultan adevărate numai atunci cînd $\urcorner A$ este falsă, după cum rezultă din tabelele de adevăr corespunzătoare (tabelele III.12 şi III.13), adică numai atunci cînd A este adevărată.

Tabelul III.12

A	$\urcorner A$	B	$\urcorner A \Rightarrow B$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Tabelul III.13

A	$\urcorner A$	B	$\urcorner B$	$\urcorner A \Rightarrow \urcorner B$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$

Observăm că la acelaşi rezultat se putea ajunge folosind raţionamentul prin modus tollens.

Într-adevăr, $\urcorner A \Rightarrow \urcorner B$ este adevărată şi B este adevărată. Dar $B \Leftrightarrow \urcorner\urcorner B$ (conform T.15). Luînd drept P pe $\urcorner A$ şi drept Q pe $\urcorner B$, rezultă imediat prin modus tollens $\urcorner\urcorner A$ adevărată, deci A adevărată.

Raţionamentul prin reducere la absurd este foarte des întîlnit în geometrie.

Exemplu :

Să demonstrăm prin reducere la absurd următoarea teoremă din geometria euclidiană plană.

A : „Două drepte distincte D_1 şi D_2, paralele cu a treia D_3, sînt paralele între ele" sau

$$A: „D_1 \parallel D_3 \wedge D_2 \parallel D_3 \Rightarrow D_1 \parallel D_2".$$

Deci A este de forma $P \wedge Q \Rightarrow R$.

Dar $P \wedge Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \urcorner(P \wedge Q) \vee R$ şi deci

$\urcorner(P \wedge Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow \urcorner(\urcorner(P \wedge Q) \vee R)$ şi aplicînd una din legile lui De Morgan obţinem : $\urcorner A \Leftrightarrow \urcorner\urcorner(P \wedge Q) \wedge \urcorner R$ adică

$P \wedge Q \wedge \urcorner R$ sau $D_1 \parallel D_3 \wedge D_2 \parallel D_3 \wedge D_1 \nparallel D_2$.

Rezultă că dacă $\urcorner A$ este adevărată, atunci şi $D_1 \nparallel D_2$ este adevărată. Dar dacă $D_1 \nparallel D_2$, atunci ele se intersectează într-un punct O. Dar $D_1 \parallel D_3$ şi $D_2 \parallel D_3$ sînt adevărate, deci punctul O nu aparţine lui D_3 şi deci printr-un punct exterior unei drepte D_3 trec două drepte paralele cu aceasta.

Dar axioma paralelelor afirmă B : „Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta dată". Am ajuns astfel la o contradicţie : din $\urcorner A$ am dedus $\urcorner B$, iar B este adevărată. Aşadar, presupunerea $\urcorner A$ este falsă : prin urmare A este demonstrată.

O altă schemă posibilă pentru raţionamentul prin reducere la absurd este următoarea :

$$\frac{\begin{matrix} B \\ \urcorner A \Rightarrow \urcorner B \end{matrix}}{A.}$$

Dacă B este adevărată şi $\urcorner A \Rightarrow \urcorner B$ este adevărată, din tabelul de adevăr al implicaţiei rezultă că $\urcorner A$ este falsă (deoarece $\urcorner B$ este falsă), deci A este adevărată.

III.14.2.4.4. *Raționament prin adjuncțiune*

Dacă propozițiile P și Q sînt adevărate, atunci este adevărată și conjuncția lor $P \wedge Q$:

$$\frac{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}}{P \wedge Q.}$$

Faptul că acest raționament este corect, rezultă imediat din definiția conjuncției.

Fie, de exemplu, P: „Triunghiul ABC este dreptunghic" și Q: „Triunghiul ABC este isoscel", ambele adevărate. Rezultă $P \wedge Q$ adevărată: „Triunghiul ABC este dreptunghic și isoscel".

III.14.2.4.5. *Raționament folosind tranzitivitatea implicației*

Dacă propozițiile $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow R$ sînt adevărate atunci și propoziția $P \Rightarrow R$ este adevărată, adică:

$$\frac{\begin{matrix} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{matrix}}{P \Rightarrow R.}$$

Acest tip de raționament este corect, conform T.21 ($(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ este adevărată conform raționamentului prin adjuncțiune).

Fie $P \Rightarrow Q$ propoziția: „Dacă $\alpha \subset \beta$ atunci $\alpha \cap \beta = \alpha$" și $Q \Rightarrow R$: „Dacă $\alpha \cap \beta = \alpha$, atunci $C\beta \subset C\alpha$", ambele adevărate în teoria mulțimilor*.

Rezultă că este adevărată propoziția $P \Rightarrow R$, adică: „Dacă $\alpha \subset \beta$, atunci $C\beta \subset C\alpha$".

III.14.2.4.6. *Trecerea de la echivalență la implicație*

Dacă propoziția $P \Leftrightarrow Q$ este adevărată, atunci sînt adevărate și propozițiile $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow P$:

$$\frac{P \Leftrightarrow Q}{P \Rightarrow Q} \quad \text{și} \quad \frac{P \Leftrightarrow Q}{Q \Rightarrow P.}$$

Se știe că $P \Leftrightarrow Q$ este adevărată numai dacă P și Q au aceleași valori logice; dar dacă P și Q au aceleași valori logice, din definiția implicației rezultă că și $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow P$ sînt adevărate.

Fie $P \Leftrightarrow Q$ propoziția „$\alpha \subset \beta$ dacă și numai dacă orice element din α este și element al lui β". Atunci sînt adevărate și afirmațiile „dacă $\alpha \subset \beta$ atunci orice element din α este și element al lui β" și „dacă orice element din α este și element al lui β atunci $\alpha \subset \beta$".

* Notăm mulțimile cu litere mici ale alfabetului grec (α, β, ..., ω, ...).

III.14.2.4.7. *Trecerea de la două implicaţii reciproce la echivalenţă*

Dacă propoziţiile $P \Rightarrow Q$ şi $Q \Rightarrow P$ sînt adevărate atunci şi $P \Leftrightarrow Q$ este adevărată :

$$\frac{\begin{matrix} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow P \end{matrix}}{P \Leftrightarrow Q.}$$

Raţionamentul este corect conform T.22 ($(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ este adevărată conform raţionamentului prin adjuncţiune).

De exemplu, fie propoziţiile adevărate din teoria mulţimilor : $P \Rightarrow Q$: „$\alpha \cup \beta = \alpha \Rightarrow \beta \subset \alpha$" şi $Q \Rightarrow P$: „$\beta \subset \alpha \Rightarrow \alpha \cup \beta = \alpha$", rezultă adevărată propoziţia $P \Leftrightarrow Q$: „$\alpha \cup \beta = \alpha \Leftrightarrow \beta \subset \alpha$".

În exemplele anterioare am utilizat diverse tipuri de raţionamente în efectuarea unor demonstraţii simple. Pentru demonstrarea unor teoreme mai dificile se recurge la înlănţuirea mai multor raţionamente de acelaşi tip sau diferite. Avantajul utilizării diferitelor scheme de raţionament constă în scurtarea demonstraţiei, înlocuind mai multe afirmaţii printr-o concluzie îndreptăţită de raţionamentul considerat.

ÎNTREBĂRI ŞI EXERCIŢII

1. Ce este logica ?

2. Care din următoarele formulări sînt propoziţii în sensul celor exprimate la pagina 75 ?

a) Toţi oamenii sînt muncitori.

b) Ionescu este elev în clasa a X-a.

c) Cînd pisica nu-i acasă, joacă şoarecii pe masă.

d) Această navă este rapidă.

e) Ce vînt te aduce ?

f) Pătratul este romb.

g) Triunghiul are patru laturi ?

h) $5 > 3$.

i) Dacă nu vin, înseamnă că nu întîrziaţi.

3. Care din următoarele propoziţii sînt simple şi care sînt compuse ; indicaţi propoziţiile componente.

a) Astăzi nu merg la teatru.

b) Dacă ABC este un triunghi dreptunghic, atunci pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.

c) Ninge.

d) Nu ştiu să înot, deci mă pot îneca.

e) Ştiu logică, dar nu pot să demonstrez această teoremă.

4. Să se scrie simbolic propozițiile compuse de la exercițiul 3. Să se construiască tabelul de adevăr pentru propoziția e.

5. Să se construiască tabelele de adevăr și diagramele Euler-Venn ale următoarelor formule :

a) $\neg (P \wedge Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$.

b) $\neg (P \Leftrightarrow Q) \wedge P$.

c) $(P \Rightarrow \neg Q) \wedge P \Rightarrow Q$.

6. Să se verifice că următoarele formule (pagina 80) sînt identic adevărate :

a) T.4, T.11, T.12 — cu ajutorul tabelelor de adevăr ;

b) T.13, T.14 — cu ajutorul diagramelor Euler-Venn.

7. Să se arate că relația „este logic echivalent" este o relație de echivalență în mulțimea propozițiilor.

8. Să se arate că dacă $P \Leftrightarrow Q$ atunci și $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$ și $P \wedge R \Leftrightarrow Q \wedge R$ și $P \vee R \Leftrightarrow Q \vee R$.

9. Să se exprime disjuncția prin negație și conjuncție.

10. Să se exprime conjuncția prin negație și disjuncție.

11. Să se exprime implicația prin negație și conjuncție.

12. Să se exprime conjuncția prin negație și implicație.

13. Să se exprime disjuncția prin negație și implicație.

14. Să se arate, fără a folosi tabele de adevăr, că următoarele formule sînt tautologii :

a) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$;

b) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$;

c) $\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$.

15. Să se arate că oricare ar fi formula A, ea este echivalentă logic cu o formulă R în care negația $\neg$ nu se aplică decît propozițiilor simple.

16. Să se scrie simbolic următorul raționament :

Dacă m și n sînt numere pare, atunci $m^2 + n^2$ este par.

Dar $2a$ și $2b$ sînt pare.

Deci $4a^2 + 4b^2$ este par.

17. Să se demonstreze prin reducere la absurd teorema „Dacă $a \cdot b = 0$ atunci $a = 0$ sau $b = 0$".

18. Să se scrie simbolic următorul enunț :

„Se știe că dacă una din cele trei persoane care discută spune ceva adevărat, atunci toate celelalte afirmații ale sale vor fi adevărate, iar dacă spune ceva fals, tot ce va spune este fals. Prima persoană face o afirmație, pe care nu o știm. Apoi cea de a doua declară : „A spus că a spus adevărul" și „De fapt, a spus adevărul". Cea de a treia persoană spune : „Nu, cel care a vorbit primul a mințit".

Se poate deduce care persoane au spus adevărul ?

19. Dați exemple de raționamente prin trecere de la echivalență la implicație, folosite în rezolvarea problemelor de geometrie.

20. Să se arate că următoarele formule sînt tautologii:

a) $(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q))$.

b) $P \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q))$.

c) $P \Leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q))$.

d) $((P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q))$.

Să se scrie dualele formulelor b) și c).

III.14.3. Calculul predicatelor

III.14.3.1. *Calculul predicatelor ca dezvoltare a calculului propozițiilor*

Pentru început, să ne amintim cîteva elemente de teoria mulțimilor. Se știe că putem reprezenta o mulțime în două feluri. Un prim procedeu constă în enumerarea elementelor din care este alcătuită mulțimea: se poate vorbi de „mulțimea elevilor: Ionescu Ion, Georgescu Dan, Popescu Dinu", sau de „mulțimea numerelor: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$". Acest lucru se scrie de obicei punînd elementele între acolade:

$A = \{$Ionescu Ion, Georgescu Dan, Popescu Dinu$\}$;

$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Procedeul devine incomod dacă numărul elementelor este foarte mare și este de neutilizat, în cazul mulțimilor infinite.

Există și un alt mod de a defini o mulțime și anume prin specificarea unei proprietăți pe care o au toate elementele din mulțimea considerată; astfel se poate vorbi de „mulțimea tuturor premianților din clasa a IX-a" sau de „mulțimea tuturor numerelor întregi x care verifică inegalitățile $-5 \leqslant x \leqslant 5$" (este chiar mulțimea B precizată anterior); sau de „mulțimea cărților dintr-o bibliotecă". În acest mod, și numai așa, se pot defini și mulțimi cu un număr infinit de elemente, de pildă: „mulțimea numerelor întregi", sau „mulțimea numerelor întregi pare", sau „mulțimea cercurilor cu aria 4".

Observăm că acest procedeu stabilește o legătură între mulțimi și proprietăți din logica matematică: se precizează o anumită mulțime de obiecte (mulțimea elevilor dintr-o anumită clasă sau mulțimea numerelor întregi, de exemplu) și apoi se enunță o propoziție care este adevărată pentru toate elementele mulțimii considerate și numai pentru acestea de exemplu, „este un elev foarte bun" sau „are aptitudini sportive" etc. Mulțimea α a tuturor elementelor din mulțimea totală τ (τ poate fi, de exemplu, mulțimea elevilor sau mulțimea numerelor) care au proprietatea enunțată printr-o propoziție A se numește mulțimea de adevăr a propoziției A.

Fie de exemplu τ mulţimea numerelor întregi, iar α mulţimea numerelor întregi pare. Acest lucru se poate scrie:

$$\alpha = \{x \mid x \text{ este număr par}\}.$$

Sau dacă β este mulţimea numerelor întregi cuprinse în intervalul închis $[-5, 5]$:

$$\beta = \{x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5\}.$$

Sau dacă γ este mulţimea perechilor ordonate de numere întregi nenegative a căror sumă este 25, deducem:

$$\gamma = \{(x, y) \mid x + y = 25, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x, y \text{ întregi}\}.$$

Referitor la propoziţiile „x este număr par", „$-5 \leqslant x \leqslant 5$", „$x + y = 25$", se impun două observaţii:

a) subiectul propoziţiei (despre cine se afirmă că are o anumită proprietate) nu este specificat (x sau x şi y); se precizează numai proprietatea. Proprietatea nu se modifică, indiferent de elementul cu care se înlocuieşte x sau y;

b) subiectul nefiind precizat, nu putem atribui valoarea de adevăr sau fals unei astfel de propoziţii; propoziţia devine însă adevărată sau falsă în momentul precizării subiectului.

De pildă, pentru $x = 2$, propoziţia „x este număr par" este adevărată, dar este falsă pentru $x = 3$; „$x + y = 25$" este adevărată pentru $x = 7$ şi $y = 18$ şi este falsă pentru $x = 1$ şi $y = 2$.

Se ştie, de la algebră, că astfel de propoziţii se numesc *predicate**.

Un predicat este o afirmaţie relativă la una sau mai multe variabile care are proprietatea că pentru valori specificate ale variabilelor este fie adevărată, fie falsă.

Astfel, predicatele pot fi unare, binare, ternare etc., după cum depind de una, două sau mai multe variabile.

Vom nota un predicat cu $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ etc. sau $P(x, y, \ldots)$ iar prin $P(a)$, $P(3)$, $P(1, 2, \ldots)$ propoziţia obţinută prin specificarea valorilor variabilelor.

Un predicat este definit în momentul în care se precizează mulţimea elementelor în care variabilele iau valori (mulţimea totală τ, sau mulţimea de referinţă).

Mulţimea de adevăr a unui predicat este mulţimea elementelor care au proprietatea P.

* Spre deosebire de sensul atribuit predicatului în gramatică, în logică, el exprimînd o anumită proprietate a subiectului, va cuprinde pe lîngă predicatul gramatical şi complemente, atribute etc.

Altfel spus, oricărei mulțimi de elemente τ și oricărui predicat $P(x)$ le corespunde o mulțime $\mathcal{D}$ ale cărei elemente sînt exact elementele din τ pentru care $P(x)$ este adevărat. $\mathcal{D}$ este mulțimea de adevăr a predicatului.

Afirmația anterioară constituie o axiomă din teoria mulțimilor și anume axioma specificației.

Axioma specificației determină pe $\mathcal{D}$ în mod unic. Se obișnuiește să se scrie:

$$\mathcal{D} = \{x \mid x \in \tau \wedge P(x)\}$$

sau cînd mulțimea de referință τ este evidentă:

$$\mathcal{D} = \{x \mid P(x)\}.$$

Exemple:

Fie τ mulțimea numerelor întregi:

1) Predicatul „$-5 \leqslant x \leqslant 5$" este unar și are mulțimea de adevăr $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) Predicatul „$x^2 - 4 = 0$", este unar: domeniul este $\{-2, 2\}$.

3) Predicatul „$4x^2 + 5x + 1 = 0$" este unar, mulțimea de adevăr fiind $\{-1\}$ (a doua rădăcină $-1/4$ nu este număr întreg, deci nu aparține mulțimii de referință).

4) Predicatul „$x^2 + 1 = 0$" este predicat unar, mulțimea sa de adevăr fiind mulțimea vidă $\emptyset$.

5) Fie acum τ mulțimea perechilor ordonate de numere întregi nenegative: predicatul „$x + y = 4$" este binar: mulțimea de adevăr a predicatului este $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0), (0, 4)\}$.

6) Predicatul „$x = y + z$" este ternar: mulțimea de adevăr nu se poate preciza prin enumerare, fiind infinită (de exemplu, elemente din domeniu sînt: (1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (2, 1, 1) etc.), dacă considerăm $\tau = Z \times Z \times Z$.

7) Fie τ mulțimea totală din teoria mulțimilor. Predicatul „$\alpha \subset \beta$" reprezintă relația de incluziune.

8) Fie τ mulțimea membrilor unei familii (fig. III.4). Predicatul „x este frate cu y" este binar și are ca mulțime de adevăr, {(Ion, Petre), (Petre, Ion), (Vlad, Dinu), (Dinu, Vlad)}.

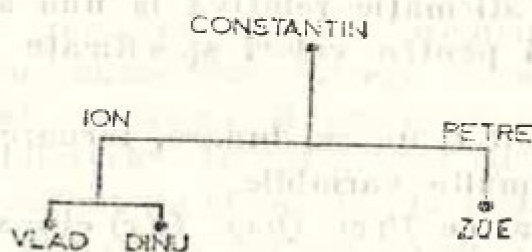


Fig. III.4

9) Fie $\tau = \tau_1 \times \tau_2$, unde τ_1 este mulțimea elevilor din clasa a IX-a și τ_2 este mulțimea elevilor din clasa a X-a de la o anumită școală. Putem considera predicatul „x are media mai mare la matematică decît y", unde $x \in \tau_1$ și $y \in \tau_2$.

Predicatele multiple (binare, ternare etc.) se numesc și relații (binare, ternare etc.).

Astfel, de exemplu, în loc să spunem că x și y au proprietatea „$x \leqslant y$", spunem „x este în relația $\leqslant$ cu y". Sau în loc de x, y are proprietatea „x este frate cu y", spunem „x este în relația, este frate cu y".

Atît predicatele unare cît și relațiile au o deosebită importanță în matematică și își găsesc multiple aplicații în cele mai diverse domenii (informatică, lingvistică, biologie etc.).

Partea logicii matematice care studiază proprietățile predicatelor precum și operațiile și raționamentele care se pot face cu ele se numește logica predicatelor sau calculul predicatelor. Logica predicatelor apare ca o extensie a logicii propozițiilor, pătrunzînd cu analiza în structura internă a propozițiilor simple, adică ținînd seama de alcătuirea lor din subiect și predicat.

III.14.3.2. *Particularizarea unui predicat. Cuantificări*

Din exemplele date în paragraful anterior se vede că un predicat este o funcție definită pe mulțimea de referință τ, al cărui codomeniu îl reprezintă valorile de adevăr ale propozițiilor rezultate prin specificarea valorilor variabilelor (fig. III.5).

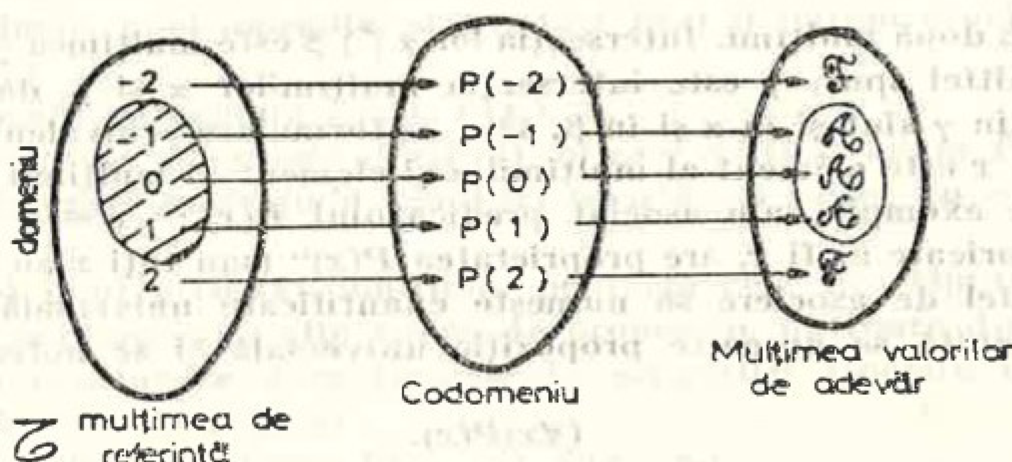


Fig. III.5

De exemplu, dacă mulțimea de referință este $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $P(x)$ este „$-1 \leqslant x < 2$", codomeniul este format din propozițiile $P(-2)$: „$-1 \leqslant -2 < 2$", $P(-1)$: „$-1 \leqslant -1 < 2$", $P(0)$: „$-1 \leqslant 0 < 2$", $P(1)$: „$-1 \leqslant 1 < 2$", $P(2)$: „$-1 \leqslant 2 < 2$". Dintre acestea $P(-1)$, $P(0)$ și $P(1)$ sînt adevărate, iar $P(2)$ și $P(-2)$ sînt false.

Deci unui predicat i se pot asocia mai multe propoziții, fiecare avînd o anumită valoare de adevăr.

În cazul exemplului precedent acest lucru se poate urmări și pe tabelul de adevăr III.14.

Tabelul III.14

x	$P(x)$
-2	$\mathcal{F}$
-1	$\mathcal{A}$
0	$\mathcal{A}$
1	$\mathcal{A}$
2	$\mathcal{F}$

Construirea tabelelor de adevăr este însă dificil de realizat pentru mulțimi de referință cu multe elemente și imposibilă pentru mulțimi infinite.

Există două metode de construire a propozițiilor asociate unui predicat $P(x)$.

Prima metodă, care de altfel a şi fost utilizată, se numeşte particularizarea predicatului şi constă în a atribui variabilelor predicatului valori efective din mulţimea de referinţă. Astfel unui predicat $P(x)$ îi asociem propoziţiile $P(x_1)$, $P(x_2)$, ... care înseamnă „x_1 are proprietatea P", „x_2 are proprietatea P", iar unui predicat multiplu, de exemplu, $P(x, y)$ îi asociem propoziţiile $P(x_1, y_1)$ („x_1 este în relaţia P cu y_1"), $P(x_2, y_2)$ („x_2 este în relaţia P cu y_2") etc. Semnificaţia propoziţiilor particulare astfel obţinute depinde de elementele reprezentate de x_1, x_2, y_1, y_2. Aceste elemente se numesc variabile libere.

O altă metodă asociază predicatelor un tip special de propoziţii, numite cuantificări ale predicatului, care spre deosebire de propoziţiile particulare, presupun participarea parţială sau totală a elementelor din mulţimea de referinţă.

Există două tipuri de cuantificări:

1) *Cuantificarea universală*

Fie α şi β două mulţimi. Intersecţia lor $\alpha \cap \beta$ este mulţimea $\gamma = \{x | x \in \alpha$ şi $x \in \beta\}$. Altfel spus, γ este intersecţia mulţimilor α şi β dacă şi numai dacă toţi x din γ sînt şi în α şi în β, sau, — formulare echivalentă — oricare ar fi x din γ, x este element al mulţimii α şi element al mulţimii β.

În acest exemplu, am asociat predicatului $P(x)$: „$x \in \alpha$ şi $x \in \beta$" o propoziţie, „oricare ar fi x, are proprietatea $P(x)$" (sau toţi x au proprietatea $P(x)$). O astfel de asociere se numeşte cuantificare universală, iar propoziţia care rezultă se numeşte propoziţie universală şi se notează simbolic prin:

$$(\forall x)P(x).$$

Simbolul „$\forall$" se numeşte *cuantor universal* sau *cuantificator universal*.

Deoarece semnificaţia propoziţiei universale nu depinde explicit de x, variabila x se numeşte, în acest caz, variabilă legată. Propoziţia $(\forall x)P(x)$ este adevărată dacă şi numai dacă toate elementele x din mulţimea de referinţă τ au proprietatea P şi este falsă dacă pentru cel puţin un element x din τ proprietatea nu este adevărată.

În cazul unui predicat multiplu, de exemplu $P(x, y, \ldots)$ propoziţia universală asociată este:

$$(\forall x)(\forall y)\ldots P(x, y, \ldots)$$

x, y, ... fiind variabilele legate.

2) *Cuantificare existenţială*

Să considerăm din nou două mulţimi α şi β şi să presupunem că $\alpha \not\subset \beta$. Ce înseamnă acest lucru? Înseamnă că există cel puţin un element x astfel încît dacă $x \in \alpha$ atunci $x \notin \beta$.

Predicatului „dacă $x \in \alpha$ atunci $x \notin \beta$" îi putem asocia propoziția „există cel puțin un x cu proprietatea dacă $x \in \alpha$ atunci $x \notin \beta$". O asemenea asociere se numește cuantificare existențială, iar propoziția rezultată se numește propoziție existențială și se notează:

$$(\exists x)P(x)$$

unde „$\exists$" reprezintă *cuantificatorul existențial.*

Și în acest caz x este variabilă legată.

Propoziția existențială este adevărată dacă și numai dacă există cel puțin un element din mulțimea de referință a predicatului pentru care proprietatea este adevărată și este falsă dacă nici un element din mulțimea de referință nu are proprietatea P.

Pentru predicate multiple $P(x, y, \ldots)$ existențiala asociată are forma:

$$(\exists x)(\exists y)\ldots P(x, y, \ldots)$$

În concluzie, unei anumite proprietăți $P(x)$ îi putem asocia trei tipuri de propoziții:

1. *Propoziții particulare* $P(x_1)$, $P(x_2)$, ...

2. *O propoziție universală* $(\forall x)P(x)$ (oricare ar fi x, avem $P(x)$).

3. *O propoziție existențială* $(\exists x)P(x)$ (există cel puțin un x pentru care avem $P(x)$).

În cazul unui predicat multiplu, pe lîngă cele trei tipuri menționate anterior se pot asocia și alte tipuri de propoziții, obținute din combinarea acestora. În continuare dăm tipurile de propoziții asociate unui predicat binar (relație binară) $P(x, y)$:

1. *Propoziții particulare:* $P(x_1, y_1)$, $P(x_2, y_2)$, ...

2. *Propoziții particulare universalizate*, obținute prin aplicarea cuantorului universal uneia dintre variabile și prin particularizarea celeilalte variabile: $(\forall x)P(x, y_1)$, $(\forall x)P(x, y_2)$, ..., care se citesc: „oricare ar fi x, avem $P(x, y_1)$", „oricare ar fi x, avem $P(x, y_2)$". x este variabilă legată, iar y_1, y_2, ... sînt variabile libere. Sau, $(\forall y)P(x_1, y)$, $(\forall y)P(x_2, y)$, ... cînd y este variabilă legată și x_1, x_2, ... sînt variabile libere.

3. *Propoziții particulare existențiale*, obținute analog, prin utilizarea cuantorului existențial: $(\exists x)P(x, y_1)$, $(\exists x)P(x, y_2)$, ... cu x variabilă legată și y_1, y_2, ... variabile libere și $(\exists y)P(x_1, y)$, $(\exists y)P(x_2, y)$, ... cu y variabilă legată și x_1, x_2, ..., variabile libere.

4. *O propoziție universală* $(\forall x)$ $(\forall y)P(x, y)$: „oricare ar fi x și oricare ar fi y, avem $P(x, y)$". Observăm că semnificația propoziției nu se schimbă, dacă schimbăm ordinea în care apar variabilele cu cei doi cuantori: $(\forall y)$ $(\forall x)P(x, y)$ este propoziția „oricare ar fi y și oricare ar fi x, avem $P(x, y)$".

5. *O propoziție existențială*: $(\exists x)$ $(\exists y)P(x, y)$: „există cel puțin un x și există cel puțin un y pentru care avem $P(x, y)$". Semnificația acestei propoziții este aceeași cu a propoziției $(\exists y)$ $(\exists x)P(x, y)$.

6. *Două propoziții existențiale universalizate*: $(\forall x)$ $(\exists y)P(x, y)$ care se citește „oricare ar fi x, există cel puțin un y, astfel încît să avem $P(x, y)$" și $(\forall y)$ $(\exists x)P(x, y)$, care se citește „oricare ar fi y, există cel puțin un x, astfel încît să avem $P(x, y)$".

7. *Două propoziții universale existențializate*: $(\exists x)$ $(\forall y)P(x, y)$, adică „există cel puțin un x, astfel încît oricare ar fi y, avem $P(x, y)$" și $(\exists y)$ $(\forall x)$ $P(x, y)$, adică „există cel puțin un y, astfel încît oricare ar fi x, avem $P(x, y)$".

Este important să observăm că în cazul ultimelor categorii de propoziții (existențiale universalizate și universale existențializate) ordinea în care apar cuantorii este esențială.

Vom ilustra acest lucru printr-un exemplu. Fie τ mulțimea perechilor ordonate de numere reale și $P(x, y)$ predicatul „$x < y$". Propoziția $(\forall x)$ $(\exists y)P(x, y)$ adică „oricare ar fi x, există cel puțin un y, astfel încît $x < y$" este adevărată (pentru orice număr real, fie acesta x_1, putem determina un număr real y_1, astfel încît $x_1 < y_1$; de exemplu, $y_1 = x_1 + 1$). În schimb propoziția $(\exists y)$ $(\forall x)P(x, y)$, adică „există cel puțin un y, astfel încît oricare ar fi x, $x < y$" este falsă (nu există un număr real care să fie mai mare decît toate numerele reale).

Exemplu:

Fie τ mulțimea numerelor naturale $\{5, 6, 7, 8\}$ și $P(x)$ predicatul : „$x < 7$".
Propozițiile asociate predicatului sînt:

- propoziții particulare:
  $P(5)$: „$5 < 7$" cu valoarea de adevăr $\mathcal{A}$;
  $P(6)$: „$6 < 7$" cu valoarea de adevăr $\mathcal{A}$;
  $P(7)$: „$7 < 7$" cu valoarea de adevăr $\mathcal{F}$;
  $P(8)$: „$8 < 7$" cu valoarea de adevăr $\mathcal{F}$;
- propoziția universală:
  $(\forall x)P(x)$: „oricare ar fi x, avem $x < 7$"

care este falsă (particularele $P(7)$ și $P(8)$ avînd valoarea $\mathcal{F}$):

- propoziția existențială:
  $(\exists x)P(x)$: „există cel puțin un x, pentru care $x < 7$", care este adevărată.

III.14.3.3. *Operații cu predicate*

Am văzut că o mulțime poate fi reprezentată ca mulțimea de adevăr a unui predicat. Fie acum două mulțimi α și β, determinate ca mulțimi de adevăr ale predicatelor $P(x)$ și $Q(x)$; τ este mulțimea totală din teoria mulțimilor:

$$\alpha = \{x \mid P(x)\} \text{ și } \beta = \{x \mid Q(x)\}.$$

Complementara mulțimii α este mulțimea $C\alpha$ formată din elemente din mulțimea totală, care nu aparțin lui α, adică pentru care proprietatea P este falsă:

$$C\alpha = \{x \mid \text{non } P(x)\}.$$

Intersecţia mulţimilor α şi β este mulţimea ale cărei elemente au şi proprietatea P şi proprietatea Q :

$$\alpha \cap \beta = \{x \mid P(x) \text{ şi } Q(x)\}.$$

Reuniunea mulţimilor α şi β este mulţimea elementelor pentru care cel puţin una din proprietăţi P sau Q este adevărată :

$$\alpha \cup \beta = \{x \mid P(x) \text{ sau } Q(x)\}.$$

Diferenţa dintre mulţimea α şi mulţimea β este mulţimea formată din elementele din α care nu sînt elemente ale lui β, adică :

$$\alpha - \beta = \{x \mid P(x) \text{ şi non } Q(x)\}.$$

Mulţimea α este inclusă în β dacă orice element din α are proprietatea Q : $\alpha \subset \beta$ dacă şi numai dacă „oricare ar fi x, dacă $P(x)$ atunci $Q(x)$".

Mulţimea α este egală cu mulţimea β dacă orice element din α aparţine lui β şi dacă orice element din β aparţine lui α : $\alpha = \beta$ dacă şi numai dacă „oricare ar fi x, $P(x)$ dacă şi numai dacă $Q(x)$".

Observăm că pentru a determina mulţimile $C\alpha$, $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $\alpha - \beta$ am efectuat diferite operaţii logice cu predicate. Astfel, $C\alpha$ este mulţimea de adevăr a predicatului obţinut prin negarea lui $P(x)$: $\neg P(x)$, $\alpha \cap \beta$ este mulţimea de adevăr a predicatului obţinut prin conjuncţia predicatelor care determină mulţimile α şi β : $P(x) \wedge Q(x)$, $\alpha \cup \beta$ este determinată de $P(x) \vee Q(x)$ iar $\alpha - \beta$ de $P(x) \wedge \neg Q(x)$.

Relaţiile de incluziune şi egalitate între două mulţimi s-au definit cu ajutorul propoziţiilor universale asociate implicaţiei predicatelor $P(x)$ şi $Q(x)$ $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$, respectiv echivalenţei predicatelor $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

Fie două predicate $P(x)$ şi $Q(x)$, cu mulţimea de referinţă τ şi mulţimile de adevăr $\mathcal{D}_1$, respectiv $\mathcal{D}_2$.

Negaţia predicatului $P(x)$, $\neg P(x)$ are mulţimea de adevăr $\tau - \mathcal{D}_1$ (mulţimea elementelor care nu au proprietatea P). Conjuncţia predicatelor $P(x)$ şi $Q(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$ are mulţimea de adevăr $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, iar disjuncţia $P(x) \vee \vee Q(x)$ are mulţimea de adevăr $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Implicaţia lui $Q(x)$ prin $P(x)$: „$P(x) \Rightarrow Q(x)$" are mulţimea de adevăr $C\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, iar echivalenţa predicatelor $P(x)$ şi $Q(x)$ are mulţimea de adevăr $(C\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \cap (C\mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1)$. Se spune că predicatele $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt echivalente dacă mulţimile lor de adevăr coincid $(\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2)$.

Cele afirmate anterior se pot urmări pe figurile III.6, unde zona haşurată reprezintă mulţimile de adevăr pentru diferitele predicate obţinute din $P(x)$ şi $Q(x)$ prin aplicarea operaţiilor logice. Deci, aşa cum în calculul propoziţiilor construim formule logice cu propoziţii simple sau compuse, la fel în calculul predicatelor vom putea construi formule cu predicate.

Cele cinci operaţii logice se pot efectua şi cu propoziţiile asociate predicatelor.

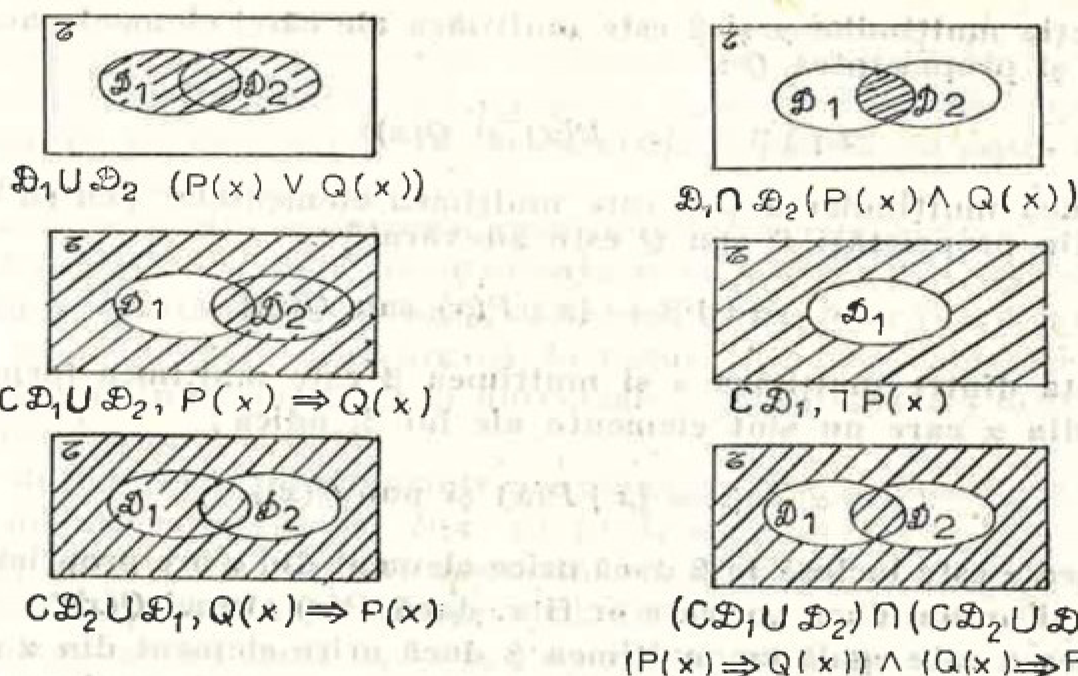


Fig. III.6

Fie predicatele $P(x)$ şi $Q(x)$. Fiecărei operaţii logice îi putem asocia diferite propoziţii:

a) *Propoziţii particulare*, de exemplu:
$\neg P(x_1)$; $\neg Q(x_1)$;
$P(x_1) \Rightarrow P(x_2)$; $Q(x_1) \Rightarrow Q(x_2)$;
$P(x_1) \Leftrightarrow P(x_2)$; $Q(x_1) \Leftrightarrow Q(x_2)$.

b) *Propoziţii universale*:
$(\forall x) \neg P(x)$;
$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$;
$(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

c) *Propoziţii existenţiale*:
$(\exists x \neg P(x)$;
$(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$;
$(\exists x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

Am utilizat ca operaţii logice numai $\neg$, $\Rightarrow$ şi $\Leftrightarrow$, deoarece ştim din calculul cu propoziţii că atît conjuncţia, cît şi disjuncţia se pot exprima cu ajutorul conectorilor $\neg$ şi $\Rightarrow$ (vezi exerciţiile 12, 13 de la pagina 89).

III.14.3.4. *Identităţi logice*

În calculul propoziţiilor am arătat importanţa pe care o au tautologiile, adică formulele care sînt întotdeauna adevărate, indiferent de valoarea de adevăr a propoziţiilor componente.

Se numeşte identitate logică o propoziţie asociată unui predicat, care are întotdeauna valoarea $\mathcal{A}$, indiferent de semnificaţia predicatului care a determinat-o.

Plecînd de la o anumită tautologie putem construi două categorii de identități logice:

a. Înlocuind toate propozițiile P, Q, R, ... care apar, sau numai pe unele dintre ele, cu predicate. Astfel de exemple de identități logice sînt:

$P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x)$, din T.1;
$P(x) \Rightarrow P(x)$, din T.3;
$\neg\neg P(x) \Leftrightarrow P(x)$, din T.15 (negația negației);
$P(x) \vee \neg P(x)$, din T.16 (principiul terțiului exclus);
$\neg(P(x) \wedge \neg P(x))$ din T.17 (principiul necontradicției);
$\neg(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee \neg Q(x)$, din T.18 (De Morgan);
$P(x) \wedge Q \Rightarrow P(x)$, din T.1;
$(P(x) \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow R(x))$, din T.21 (tranzitivitatea implicației);
în ultimele două exemple Q fiind o propoziție și nu un predicat.

b. Construind propozițiile asociate identităților obținute prin procedeul enunțat anterior. De exemplu, din principiul identității $P \Rightarrow P$ putem obține identitățile logice:

$P(x_1) \Rightarrow P(x_1)$, $\quad P(x_1, y_1) \Rightarrow P(x_1, y_1)$;
$(\forall x)(P(x) \Rightarrow P(x))$, sau $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \Rightarrow P(x, y))$;
$(\exists x)(P(x) \Rightarrow P(x))$, $\quad (\exists x)(\exists y)(P(x, y) \Rightarrow P(x, y))$.

Din negația negației $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ obținem:

$\neg\neg P(x_1) \Leftrightarrow P(x_1)$, $\quad \neg\neg P(x_1, y_1) \Leftrightarrow P(x_1, y_1)$
$(\forall x)(\neg\neg P(x) \Leftrightarrow P(x))$, sau $(\forall x)(\forall y)(\neg\neg P(x, y) \Leftrightarrow (P(x, y))$;
$(\exists x)(\neg\neg P(x) \Leftrightarrow P(x))$, $\quad (\exists x)(\exists y)(\neg\neg P(x, y) \Leftrightarrow P(x, y))$.

Plecînd de la principiul terțiului exclus $P \vee \neg P$ avem:

$P(x_1) \vee \neg P(x_1)$, $\quad P(x_1, y_1) \vee \neg P(x_1, y_1)$;
$(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$, sau $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \vee \neg P(x, y))$;
$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$, $\quad (\exists x)(\exists y)(P(x, y) \vee \neg P(x, y))$.

Plecînd de la definiția cuantorilor $\forall$ și $\exists$ putem obține și alte identități logice, care de fapt exprimă proprietăți ale acestora.

Din definiția cuantorului universal rezultă că dacă o propoziție universală este adevărată, atunci este adevărată și oricare dintre propozițiile particulare ale acesteia. Obținem astfel identitatea logică:

$$\text{IL.1}\ (\forall x)P(x) \Rightarrow P(x_1)$$

sau, pentru un predicat binar:

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow P(x_1, y_1).$$

● Analog, dacă o propoziție particulară este adevărată, atunci este adevărată și propoziția existențială, deci

$$\text{IL.2}\ P(x_1) \Rightarrow (\exists x)P(x),$$

este o identitate logică.

În cazul unui predicat binar, IL.2 se scrie:

$$P(x_1,\ y_1) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,\ y).$$

● Dacă o propoziție universală este adevărată, este evident că și propoziția existențială este adevărată și avem identitatea logică:

$$\text{IL.3}\ \ (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$$

sau

$$(\forall x)(\forall y)P(x,\ y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,\ y).$$

● *Negarea propozițiilor cuantificate*

Pentru ca propoziția $(\forall x)P(x)$ să nu fie adevărată este suficient ca să existe o valoare particulară x_1, pentru care $P(x_1)$ să fie falsă sau $\urcorner P(x_1)$ adevărată. Dar conform IL.2:

$$\urcorner P(x_1) \Rightarrow (\exists x) \urcorner P(x).$$

Rezultă principiul negării unei propoziții universale:

$$\text{IL.4}\ \urcorner ((\forall x)P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\urcorner P(x),$$

sau, în cazul unui predicat binar:

$$\urcorner ((\forall x)(\forall y)P(x,\ y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\urcorner P(x,\ y).$$

La fel, pentru ca $(\exists x)P(x)$ să fie falsă trebuie ca oricare ar fi x, $P(x)$ să fie falsă.

Negația unei propoziții existențiale se exprimă prin identitatea logică

$$\text{IL.5}\ \ \urcorner ((\exists x)P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\urcorner P(x)$$

sau, pentru predicate binare:

$$\urcorner ((\exists x)(\exists y)P(x,\ y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\urcorner P(x,\ y).$$

Dar IL.3 și IL.4 ne conduc și la identitățile:

$$\text{IL.6}\ \ (\forall x)\urcorner P(x) \Rightarrow \urcorner ((\forall x)P(x)) \text{ respectiv}$$

$$(\forall x)(\forall y)\urcorner P(x,\ y) \Rightarrow \urcorner((\forall x)(\forall y)P(x,\ y)), \text{ iar IL.3 și IL.5 la}$$

$$\text{IL.7}\ \ \urcorner ((\exists x)P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\urcorner P(x) \text{ respectiv}$$

$$\urcorner ((\exists x)(\exists y)P(x,\ y)) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)\urcorner P(x,\ y).$$

Identitățile logice stau la baza construcției schemelor de raționamente din calculul predicatelor, pe care de altfel le-am întîlnit frecvent în rezolvarea diferitelor probleme de geometrie sau algebră.

Astfel, ori de cîte ori aplicăm, într-un caz particular, o teoremă, definiție sau axiomă, enunțată, pentru o clasă de obiecte, utilizăm IL.1, adică trecerea de la o propoziție universală la o propoziție particulară.

De exemplu, în geometria plană este adevărată propoziția: „oricare ar fi triunghiul ABC, dacă el este dreptunghic, atunci pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor".

Să presupunem că trebuie rezolvată problema:

Se dă un dreptunghi cu lungimea de 25 m și lățimea de 16 m (fig. III.7). Să se determine diagonala dreptunghiului.

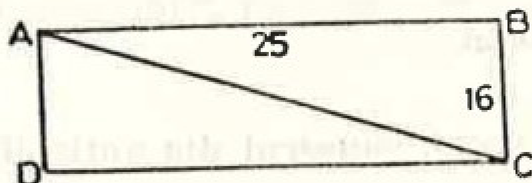


Fig. III.7

Din teorema lui Pitagora, prin II.1 rezultă pentru ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25^2 + 16^2,$$

ceea ce ne permite să determinăm imediat diagonala dreptunghiului.

În continuare vom da un exemplu de rezolvare de probleme în care intervin calcule cu predicate.

O schemă de raționament specifică calculului cu predicate este *silogismul*. Silogismul are diferite forme, cea mai cunoscută fiind:

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))\\ P(x_1)\end{array}}{Q(x_1)}$$

În ipoteza că propozițiile $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ și $P(x_1)$ sînt adevărate, rezultă adevărată propoziția particulară $Q(x_1)$.

Într-adevăr, dacă $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ este adevărată, rezultă că oricare din propozițiile particulare asociate predicatului $P(x) \Rightarrow Q(x)$ este adevărată. Deci și $P(x_1) \Rightarrow Q(x_1)$ este adevărată. Dar $P(x_1)$ este adevărată. Rezultă din definiția implicației și $Q(x_1)$ adevărată.

Un exemplu foarte cunoscut de raționament prin silogism este următorul:

Toți oamenii sînt muritori
Socrate este om.

Deci Socrate este muritor.

Exemplu:

În algebră se demonstrează teorema: „pentru orice funcție de gradul doi $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, dacă $a > 0$ atunci f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$".

Fie $P(f)$: „$a > 0$" și $Q(f)$: „f strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$".

În mulţimea funcţiilor de gradul doi este adevărată propoziţia : $(\forall f)(P(f) \Rightarrow Q(f))$.

Fie acum $f(x) = 2x^3 - x + 1$, deci $a = 2$.

$P(2x^3 - x + 1)$ este „$2 > 0$" şi este adevărată.

Prin silogism rezultă $Q(f)$ adevărată, adică $2x^2 - x + 1$, strict descrescătoare în intervalul $\left(-\infty, \frac{+1}{4}\right]$ şi strict crescătoare în intervalul $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Paradoxul mincinosului

Un paradox foarte vechi, cunoscut din antichitate, este paradoxul mincinosului.

Iniţial avea forma unei întrebări P: Minţi cînd spui că minţi ?" adresată unui mincinos, adică unei persoane care nu spune niciodată adevărul. Mincinosul nu poate să răspundă decît mint" sau „nu mint".

Dacă răspunde „mint", el nespunînd niciodată adevărul, înseamnă că propoziţia R: „mint" este falsă, deci $\neg R$ este adevărată, adică „nu mint" este adevărată, ceea ce contrazice ipoteza că el este un mincinos total.

Dacă răspunde „nu mint", analog se deduce că „mint" este adevărată, şi mincinosul total spune un adevăr, ceea ce din nou contravine ipotezei.

Deci propoziţiei „mint" nu i se poate atribui nici valoarea $\mathcal{A}$, nici valoarea $\mathcal{F}$, ea luînd imediat valoarea contrară.

O altă formă a acestui paradox se numeşte „paradoxul lui Epimenide" şi se enunţă astfel : „Epimenide cretanul spunea că toţi cretanii sînt mincinoşi". Se ajungea aparent la aceeaşi contradicţie încercînd să aflăm dacă ceea ce afirmă Epimenide este adevărat sau nu.

Dacă „toţi cretanii sînt mincinoşi", este adevărată, atunci Epimenide fiind cretan, el este mincinos şi deci nu spune adevărul cînd afirmă că „toţi cretanii sînt mincinoşi", de unde contradicţia cu ipoteza.

Dacă „toţi cretanii sînt mincinoşi" este falsă, înseamnă că Epimenide minte cînd face această afirmaţie, adică este de fapt adevărată propoziţia „există cel puţin un cretan care nu minte". În această situaţie paradoxul dispare.

În general astfel de paradoxuri ascund o greşeală de logică. Astfe , să formalizăm paradoxul lui Epimenide. Fie $Q(x)$: „x este mincinos", atribuind cuvîntului mincinos sensul menţionat anterior (un individ care nu spune niciodată adevărul), iar $P(x)$: „x este cretan".

Contradicţia provenea din silogismul :

$$\begin{array}{c}(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ \underline{P(\text{Epimenide})} \\ Q(\text{Epimenide}).\end{array}$$

Raţionamentul este însă corect numai dacă premisele sînt adevărate, ceea ce nu putem afirma, deoarece nu ştim dacă toţi cretanii sînt mincinoşi sau nu. Deci concluzia „Epimenide minte" nu poate fi afirmată.

Există însă multe alte variante ale acestui paradox. De exemplu :

a) Ce valoare de adevăr are : „Propoziţia aceasta este falsă" ?

b) Într-o insulă trăiau niște uriași foarte răi și șireți. Orice străin care acosta pe insulă era jertfit fie zeului adevărului, fie zeului minciunii, în funcţie de valoarea de adevăr a răspunsului pe care îl da străinul la o anumită întrebare. Unul dintre străini, fiind întrebat „Care îţi va fi moartea ? "a răspuns „Voi fi jertfit zeului minciunii", răspuns care a pus în mare încurcătură pe uriași.

ÎNTREBĂRI ȘI EXERCIŢII

1. Ce se înţelege printr-un predicat ? Daţi exemple de predicate unare şi predicate binare.

2. Cîte tipuri de propoziţii se pot asocia unui predicat ? Exemplificaţi în cazul predicatelor :

a) $P(x, y)$: „x divide pe y", cu τ mulţimea numerelor naturale ;

b) $P(x)$: „$x^2 - 4x + 2 = 0$", cu τ mulţimea numerelor reale ;

c) $P(x, y)$: „$(x \neq y) \wedge (x < y)$, cu τ mulţimea numerelor raţionale.

3. Fie predicatele $P(x)$: „x are note mari la matematică" şi $Q(x)$: „x are note mari la română", τ fiind mulţimea elevilor dintr-o clasă.

Să se scrie formalizat propoziţiile :

a) Toţi elevii au note mari la matematică, iar unii la română.

b) Unii elevi au note mici la română.

c) Fiecare elev are note mari la matematică şi la română.

d) Nu toţi elevii au note mici la matematică.

e) Există elevi care au note mari la matematică, dar mici la română.

f) Nici un elev nu are note mici la matematică şi la română.

g) Dacă toţi elevii au note mici la română, atunci cîţiva au note mari la matematică.

h) Dacă nu toţi elevii au note mici la matematică, atunci unii nu au note mici nici la română.

i) Anca are note mari la matematică şi Andrei are note mici la română.

4. Să se scrie formalizat şi apoi în cuvinte negaţiile propoziţiilor din exerciţiul 3.

5. Care este valoarea logică a propoziţiilor din exerciţiul 3 dacă :

— propoziţia a) este adevărată ;

— propoziţia b) este adevărată ;

— propoziţia c) este adevărată.

6. Fie $P(x)$ şi $Q(x)$, două predicate cu aceeaşi mulţime de referinţă. Să se arate că următoarele propoziţii sînt identităţi logice:

$\mathbf{a_1}$. $(P(x_1) \Rightarrow S) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Rightarrow S)$;

$\mathbf{a_2}$. $((\exists x)P(x) \Rightarrow S) \Rightarrow (P(x_1) \Rightarrow S)$;

$\mathbf{a_3}$. $(R \Rightarrow (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (R \Rightarrow Q(x_1))$;

$\mathbf{a_4}$. $(R \Rightarrow Q(x_1)) \Rightarrow (R \Rightarrow (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{a_5}$. $((\forall x)P(x) \Rightarrow S) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \Rightarrow S)$;

$\mathbf{a_6}$. $(R \Rightarrow (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (R \Rightarrow (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{b_1}$. $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)Q(x))$;

$\mathbf{b_2}$. $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow S) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Leftrightarrow S)$;

$\mathbf{b_3}$. $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{b_4}$. $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow S) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \Leftrightarrow S)$;

$\mathbf{b_5}$. $S \Rightarrow (\forall x)(S \vee Q(x))$; $S \Rightarrow (\exists x)(S \vee Q(x))$;

$\mathbf{c_1}$. $((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$;

$\mathbf{c_2}$. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{c_3}$. $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(S \vee Q(x))$;

$\mathbf{c_4}$. $(\exists x)(S \vee Q(x)) \Leftrightarrow S \vee (\exists x)Q(x)$;

$\mathbf{c_5}$. $((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$;

$\mathbf{c_6}$. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{c_7}$. $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(S \vee Q(x))$;

$\mathbf{c_8}$. $(\forall x)(S \vee Q(x)) \Rightarrow (S \vee (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{c_9}$. $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \vee Q(x_1))$;

$\mathbf{c_{10}}$. $(S \vee Q(x_1)) \Rightarrow (S \vee (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{c_{11}}$. $(S \vee (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \vee (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{d_1}$. $(\forall x)(S \wedge Q(x)) \Rightarrow S$;

$\mathbf{d_2}$. $(\exists x)(S \wedge Q(x)) \Rightarrow S$;

$\mathbf{e_1}$. $((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$;

$\mathbf{e_2}$. $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{e_3}$. $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(S \wedge Q(x))$;

$\mathbf{e_4}$. $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(S \wedge Q(x))$;

$\mathbf{e_5}$. $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \wedge (\exists x)Q(x))$;

$\mathbf{e_6}$. $(S \wedge (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (S \wedge (Q(x_1))$.

7. Definiţi relaţia binară:

a) simetrică;

b) reflexivă;

c) tranzitivă;

d) antisimetrică.

8. Să se arate că în mulţimea numerelor reale relaţiile:

$P(x, y)$: „$x = y$"

$R(x, y)$: „$|x - y| < 1$"

sînt reflexive şi simetrice, iar relaţiile

$S(x, y)$: „$x < y$",

$T(x, y)$: „$x - y = 1$"

sînt reflexive şi antisimetrice.

De asemenea să se arate că relaţiile P şi S sînt tranzitive, iar T intranzitivă. R nu este nici tranzitivă, nici intranzitivă.

9. Daţi exemple de relaţii de ordine parţială şi de relaţii de echivalenţă.

10. Arătaţi că în mulţimea submulţimilor unei mulţimi γ „$\alpha \subset \beta$" este o relaţie de ordine parţială.

Indicaţii şi răspunsuri

Pagina 67

3. Oricare. **4.** Se compară cifrele de acelaşi ordin. 1° $a = 9$, $b = 7$, $c \geqslant 1$ sau $a = 9$, $b > 7$; 2° $a < 9$ sau $a = 9$ şi $b < 7$. **5–8.** Se folosesc exemplele de la III.3.1 şi III.3.2. **9–14.** Analog cu **4.** **15–23.** Se folosesc exemplele de la III.4. **24–41.** Se folosesc exemplele de la III.4.2 şi III.4.3. **42–63.** Se folosesc exemplele de la III.11, III.12 şi III.13.

Pagina 88

2. a). b), c), d, f), h), i). **3.** Propoziţie simplă: c); propoziţii compuse: a), b), d), e). **9.** $P \vee Q \Leftrightarrow \urcorner(\urcorner P \wedge \urcorner Q)$. **10.** $P \wedge Q \Leftrightarrow \urcorner(\urcorner P \vee \urcorner Q)$. **11.** $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \urcorner(P \wedge \urcorner Q)$. **12.** $P \wedge Q \Leftrightarrow \urcorner(P \Rightarrow \urcorner Q)$. **13.** $P \vee Q \Leftrightarrow \urcorner P \Rightarrow Q$. **17.** Indicaţie. Se consideră următoarele propoziţii: P: „$ab = 0$"; Q: „$a = 0$"; $\urcorner Q$; R: „$b = 0$"; $\urcorner R$. Trebuie demonstrat $A: P \Rightarrow (Q \vee R)$; se presupune $\urcorner A$ şi se arată că $\urcorner A \Rightarrow \urcorner B$, cu B: „produsul a două numere nenule este nenul". **18.** Nu se poate deduce care dintre persoane au spus adevărul.

Pagina 103

3. a) $(\forall x)P(x) \wedge \urcorner(\exists x)Q(x)$; b) $(\exists x)\urcorner Q(x)$; c) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$; d) $\urcorner(\forall x)\urcorner P(x)$; e) $(\exists x)(P(x) \wedge \urcorner Q(x))$; f) $\urcorner(\exists x)(\urcorner P(x) \wedge \urcorner Q(x))$; g) $(\forall x)\urcorner Q(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$; h) $\urcorner(\forall x)\urcorner P(x) \Rightarrow (\exists x)\urcorner\urcorner(Q(x)$; i) $P(\text{Anca}) \wedge \urcorner Q$ (Andrei). **4.** a) $(\exists x)\urcorner P(x) \vee (\forall x)\urcorner Q(x)$; b) $(\forall x)Q(x)$; c) $(\exists x)(\urcorner P(x) \vee \urcorner Q(x))$; d) $(\forall x)\urcorner P(x)$; e) $(\forall x)(\urcorner P(x) \vee Q(x))$; f) $(\exists x)(\urcorner P(x) \wedge \urcorner Q(x))$; g) $(\forall x)(\urcorner Q(x) \wedge \urcorner P(x))$; h) $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)\urcorner Q(x)$; i) $\urcorner P(\text{Anca}) \vee Q(\text{Andrei})$. **5.** a) $\mathcal{A}$; b) nedecis; c) nedecis; d) $\mathcal{A}$; e) nedecis; f) $\mathcal{A}$; g) $\mathcal{A}$; h) $\mathcal{A}$; i) nedecis. Raţionament analog pentru celelalte două situaţii.

Bibliografie

1. BEZICOVICI S. I., *Calcule aproximative*, Editura Tehnică, București, 1952.
2. BOCȘA MINERVA, *Curs de analiză numerică*, Tip. Univ. Timișoara, 1971.
3. BRIȘCĂ V., IONESCU B., TUDOR GH., *Calcul numeric*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
4. CÂMPEANU F., *De la papirusul Rhind la calculatorul electronic*, Editura Ion Creangă, București, 1976.
5. DEMIDOVITCH B., MARON I., *Elements de calcul numérique*, Editions MIR, Moscou, 1973.
6. DRĂGĂNESCU M., *Sistem și civilizație*, Editura Politică, București, 1976.
7. DUMITRIU A., *Soluția paradoxelor logico-matematice*, Editura Științifică, București, 1966.
8. GEORGESCU H., PREOTEASA P., *Introducere în sistemul de operare SIRIS*, Editura Albatros, București, 1978.
9. IONESCU S., BUCUR, *Asupra aproximării numerelor reale*, Gazeta Matematică, seria A, vol. LXXVI, nr. 12, București, 1971.
10. IONESCU H., *Calcule numerice*, Editura Tehnică, București, 1954.
11. KUNTZMANN J., *Méthodes numériques*, Ed. Hermann, Paris, 1969.
12. KRÎLOV N. A., *Lecții de calcule prin aproximații*, Editura Tehnică, București, 1957.
13. LAVROV I. A., MAXIMOVA L. L., *Probleme de teoria mulțimilor și logică matematică*, Editura Tehnică, București, 1974.
14. LIVOVSCHI L., *Bazele informaticii*, Editura Albatros, București, 1979.
15. MIHĂILESCU M., *Mijloace ajutătoare în calcule tehnice, Memorator matematic și tehnic*, Editura Tehnică, București, 1958.
16. MUNTEANU E., NEGRESCU L., PRODAN A., VUSCAN T., *Introducere în informatică*, Manual pentru cursurile postliceale și elevii liceelor pentru informatică, București, 1973.
17. MOISIL C. GR., *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, Editura Științifică, București, 1968.
18. NICULESCU ST., *Noțiuni de prelucrare automată a datelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
19. NOVICOV P. S., *Elemente de logică matematică*, Editura Științifică, București, 1966.
20. POPOVICI P. C., *Calculatoare cu program și teoria programării*, Editura Științifică, București, 1972.

21. TEODORESCU N., *Calcul numeric şi grafic*, Institutul Politehnic, Bucureşti, 1951.

22. TODOR I., *Elemente de analiză numerică*, vol. I, curs litografiat de C.S.C.A.S.

23. TOMESCU I., *Articolele din Gazeta Matematică*, seria A, nr. 3–6, Bucureşti, 1971.

24. VĂCARU V., VÎLCEANU S., *Calculatorul electronic — unealta secolului XX*, *Viitorul informaticii*, Editura Academiei R. S. România, Bucureşti, 1970.

25. ALEF$_0$, ALGEBRA, *Numere reale, calcul numeric, numere complexe*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

